Matice přechodu

Buď V vektorový prostor a B_1 a B_2 jeho dvě báze. Pak matici přechodu od B_1 do B_2 nazveme matici ${}_{B_2}[id]_{B_1}$.

Podle maticové reprezentace má tento význam:

$$[x]_{B_2} = {}_{B_2}[id]_{B_1} \cdot [x]_{B_1}$$

Zřejmě platí, že ${}_{B}[id]_{B} = I_n$

Matice lineárního zobrazení

Buď $f: U \to V$ lin. zobrazení. $B_U = \{x_1 \dots x_n\}$, $B_V = \{y_1 \dots y_m\}$ báze U a V.
Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i$. Potom matice $A \in T^{m \times n}$ s prvky a_{ij} $(i = 1..m, j = 1..n)$ se nazývá matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím B_U a B_V, značme

$${}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(x_1)]_{B_V} & \dots & [f(x_n)]_{B_V} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Isomorfismus

Isomorfismus mezi prostory U, V nad $\mathbb{T}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení $f: U \to V$.

1) $f: U \to V$ je isomorfismus, pak $f^{-1}: V \to U$ je taky.
2) $f: U \to V$, $g: V \to W$ isomorfismy, pak $f \circ g: U \to W$ taky
3) zobrazení $f: U \to V$ je isomorfní když se B_U zobrazí na B_V
4) Je-li $f: U \to V$ isomorfismus, $\dim U = \dim V$

Lineární zobrazení

- Zobrazení je <u>lineární</u>:
  1) Pokud $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

- <u>Obraz a jádro</u>

Buď $f: U \to V$ lin. zobrazení:

- obraz $f(U) := \{f(x) : x \in U\}$
- jádro $\ker(f) := \{x \in U : f(x) = 0\}$

Maticový prostor

Buď $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$, pak definujeme:

1) sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) := \operatorname{span}\{A_{*1} \dots A_{*n}\}$
2) řádkový prostor $\mathcal{R}(A) := \mathcal{S}(A^T)$
3) jádro $\ker(A) : \{x \in \mathbb{T}^n ; Ax = 0\}$

$\mathcal{S}(A)$ je podprostor $\mathbb{T}^m$; $\mathcal{R}(A)$ je podprostor $\mathbb{T}^n$; $\ker(A)$ je podprostor $\mathbb{T}^n$

Dimenze

Dimenze konečně generovaného prostoru je velikost jeho báze.

Báze

Buď V vekt. prostor nad $\mathbb{T}$. Pak bází rozumíme jakýkoli LNZ systém gen. V.

Souřadnice

Nechť $B = \{v_1, \dots v_n\}$ je báze prostoru V a nechť vektor $u \in V$ má vyjádření:
$u := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Pak **souřadnice** vektoru $u \in V$ vzhledem k bázi B
rozumíme koeficienty $\alpha_1 \dots \alpha_n$, $[x]_B = \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}^T$

Lineární nezávislost

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, $v_1 \dots v_n \in V$. Pak $v_1 \dots v_n$ jsou LNZ,
když $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Podprostor

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak $U \subseteq V$ je podprostorem V,
pokud tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ se stejně definovanými operacemi.

1) $o \in U$
2) $\forall u, v \in U: u + v \in U$
3) $\forall \alpha \in \mathbb{T}, \forall u \in U: \alpha u \in U$

Lineární obal

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, $W \subseteq V$. Pak lin. obal W, značený $\mathrm{span}(W)$ je průnik všech podprostorů V obsahujících W.

To jest
$$\boxed{\mathrm{span}(W) = \bigcap_{U: W \subseteq U \in V} U}$$

Lineární kombinace

Buď V vekt. prostor nad $\mathbb{T}$, pak lin. komb. vektorů $v_1 \dots v_n$ rozumíme výraz typu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, kde $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{T}$

Vektorový prostor

Buď $\mathbb{T}$ těleso s neu 0 pro $+$, 1 pro $\cdot$. Vektorovým prostorem nad $\mathbb{T}$ rozumíme množinu V s operacemi sčítání vektorů $+ : V^2 \to V$, a násobení vektoru skalárem $\cdot : \mathbb{T} \times V \to V$ splňující pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ a $u, v \in V$:

1) $(V, +)$ je Abelova grupa
2) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
3) $1v = v$
4) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
5) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

Charakteristika tělesa

Charakteristika tělesa je nejmenší n takové, že:

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n} = 0$$

Pokud neexistuje, definuje se jako 0.

Těleso

Těleso je množina $\mathbb{T}$ spolu se dvěma komutativními binárními operacemi + a ∘:

1) $(\mathbb{T}, +)$ je Abelova grupa, neu značíme 0, inverz for a značíme $-a$
2) $(\mathbb{T} \setminus \{0\}, \circ)$ je Abelova grupa, neu značíme 1, inverz for a značíme a^{-1}
3) $\forall a, b, c \in \mathbb{T}: \; a \cdot (b + c) = ab + ac$

Znaménko permutace

Nechť se permutace $p \in S_n$ skládá z k cyklů. Pak znaménko permutace je číslo $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^{n-k}$

Složení permutace

Buďte $p, q \in S_n$. Složení permutace $(p \circ q)$ je permutace definovaná: $(p \circ q)(i) = p(q(i))$.

Inverzní permutace

Buď $p \in S_n$. Inverzní permutace k p je p^{-1} definovaná jako:

$p^{-1}(i) = j$, pokud $p(j) = i$

Permutace

Permutace na konečné množině X je vzájemně jednoznačné zobrazení $p: X \to X$

- značíme tabulkou, grafem, rozložením na cykly délky ≥ 2

Grupa

Buď $\circ : G^2 \rightarrow G$ binární operace na množině G. Pak grupa je dvojice $(G, \circ)$ splňující:

1) $\forall a,b,c \in G: a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ asociativita
2) $\exists e \in G \ \forall a \in G: e \circ a = a \circ e = a$ neutrální prvek
3) $\forall a \in G \ \exists b \in G: a \circ b = b \circ a = e$ inverzní prvek

+Abelova grupa

+4) $\forall a,b \in G: a \circ b = b \circ a$ komutativita

Regulárnost matice

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Matice A je reg., pokud soustava $Ax = 0$ má jediné řešení $x = 0$