Kontrakce hrany: $G \setminus e$:

$$V' = (V \setminus \{x,y\}) \cup \{t\}$$

$$E' = \left(E \cap \binom{V'}{2}\right) \cup \left\{ \{v,t\} \mid v \in V \;\&\; (\{v,x\} \in E \vee \{v,y\} \in E) \;\&\; v \neq x,y \right\}$$

PIE:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

sjednocení všech množin

střídavé znaménko

průnik jednotlivých podmnožin

Důkaz:

Porovnáme, kolik přispěje vlevo a vpravo.

Vlevo => 1

průnik k-tic:
- $k > p = \emptyset$
- $k = p = \binom{p}{k} = 1$
- $k < p = (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{k}$

Vpravo:

Nechť prvek p je v p podmnožinách A_i

Napravo tedy přispěje: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{k} = \binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \dots - \dots + (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{p} = *$

Binomická věta: $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{p}{k} = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \dots + \dots + (-1)^k \cdot \binom{p}{p}$

$1 - * = 0$ $\quad$ $* = 1$

$i \cdot (n - i + 1) =$

$i = 1$	$i = n$	$i \neq 1, n$
$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$
n	n	min ≥ 2
		max $2\frac{n}{2}$

Dokažte Eulerovu větu:

Graf G je Eulerovský $\iff$ Graf G je souvislý & $\forall v \in V(G)$: $\deg_G(v)$ je sudý.

Eulerovský
uzavřený souvislý tah

$\Rightarrow$ (1) G je souvislý

T je tah grafu G mezi u,v. To musí existovat, jelikož je Eulerovský.
Pak ale existuje i cesta mezi u,v a G je souvislý.

$\Rightarrow$ (2) $\forall v$ jsou stupněm sudé:

Pokud se žádný vrchol neopakuje, pak triviálně platí ← v kružnici musí být všechny stupně sudé

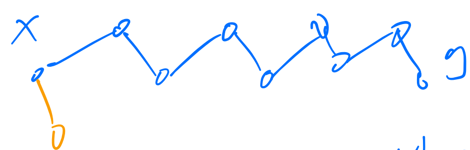
Jinak:

Mezi každým výskytem „v" musí vést hrana do ještě jiného vrcholu, jelikož by to bylo jinak smyčka a ty jsou v definici grafu zakázané.

$\Leftarrow$ G je souvislý

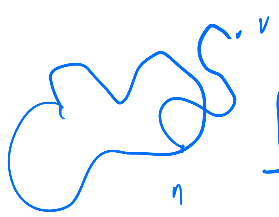
Nechť T je nejdelší tah → tedy potenciálně Eulerovský
uzavřený, tah se všemi vrcholy a hranami

(1) Nechť je otevřený



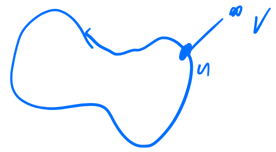
– pak stupeň vrcholu musí být 2, tedy do něj musí vést vždy dvě hrany, takže ji můžu přidat a to je spor s maximalitou!

(2) Nechť nedosahuje všechny vrcholy:



Nechť $\forall v \in T$. Nechť P je cesta mezi u,v.
Pak najdeme r,s takové že $r \in T$, $s \notin T$.
Takovou hranu $\{r,s\}$ můžu připojit k T
a to je spor s maximalitou!

(3) Nechť neobsahuje všechny hrany:



Nechť $u, v \in V(T)$, $\{u, v\} \notin E(T)$. Pak můžu u vrcholu „u" cyklus rozpojit a připojit k tomu $\{u, v\}$, což je spor s maximalitou eul. tahu.

Pro graf G je ekvivalentní:

1. Graf je vyvážený a slabě souvislý
2. Graf je Eulerovský
3. Graf je vyvážený a silně souvislý

(3) => (1)

Když je silně bude i slabě

(1) => (2)

Pokud je slabě souvislý a vyvážený, existuje tah T, kterým se dostanu mezi všechny vrcholy – vyváženost zaručí, že žádná část tahu se neztratí a slabá souvislost zajišťuje, že žádný vrchol není izolovaný.

(2) => (3)

Vychází z definice Eul. tahu, který projde každý vrchol a hranu s tím, že hrany neopakuje a vrátí se na začátek. Je to tah $T \cong C_n$, kde všechny vrcholy mají sudý stupeň

Nechť l je list grafu G. Pak G je strom $\Leftrightarrow$ $G-l$ je strom.

$\Rightarrow$ (1) G je souvislý $\Rightarrow$ $G-l$ je souvislý

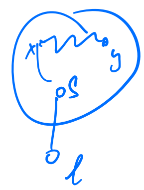
Jelikož l je list se stupněm 1, může být pouze na kraji cesty x,y, tedy když l odebereme, neporušíme souvislost zbylé cesty.

(2) G je acyklický $\Rightarrow$ $G-l$ je acyklický

$C_c \subseteq G-l \Rightarrow C_n \subseteq G$

tedy aby existoval cyklus v $G-l$, musí existovat i v G

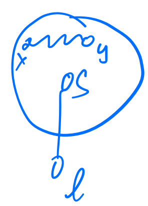
$\Leftarrow$ (1) $G-l$ je souvislý $\Rightarrow$ G je souvislý



Musí existovat cesta mezi x,s v $G-l$.

Pak v G existuje z tranzitivity cesta mezi x,l

(2) $G-l$ je acyklický $\Rightarrow$ G je acyklický



Jelikož je l list, nemůže ležet na kružnici a tím pádem jeho přidáním nevytvoříme cyklus.

Strom o n vrcholech má $n-1$ hran

Indukcí: $n=1$ ✓

$n \to n+1$

Nechť T je strom: $|V(T)| \geq 2$ (alespoň 2)

$\Rightarrow$ Podle lemma „Strom o alespoň dvou vrcholech má alespoň 2 listy.

$\to$ Je to tedy strom

$\Rightarrow$ Podle lemma G je strom $\Leftrightarrow$ $G-\ell$ je strom

$\underbrace{G-\ell \text{ je strom podle I.P.}}_{\text{má } n-1 \text{ hran}}$ Pak $\underbrace{G \text{ je taky strom}}_{\text{má } n \text{ hran}}$ $\boxed{\checkmark}$

Charakterizace stromů:

1) Je to strom $\to$ souvislý a acyklický
2) Je souvislý a $|E(G)| = |V(G)|-1$
3) Je jednoznačně souvislý: $\forall x,y \in V(G)$: $\exists!$ cesta mezi x,y
4) Je minimálně souvislý: $\forall e \in E(G)$: $G-e$ je nesouvislý
5) Je maximálně acyklický: $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$: $G+e$ je cyklický

1 $\Rightarrow$ 2

Strom o n vrcholech má $n-1$ hran...

1 $\Rightarrow$ 3

Indukcí: $n=1$ ✓ Strom o jednom vrcholu má právě jednoznačnou 0 hran.

$n \to n+1$:

$x,y \neq \ell$ Nechť $\overbrace{T \text{ je strom}}^{\text{s } n+1 \text{ vrcholy}}$ Pak v $T-\ell$ existuje jednoznačná cesta mezi x,y. Přidáním listu tuto cestu nemůžu porušit.

x, l ∃ bijekce mezi x, l v T a x, s v $T - l$.

↳ je to prakticky ta stejná cesta. Přidáním listu l cestě neporuším jednoznačnost takové cesty.

(1) => (4) Indukcí podle n:

$n = 2$ -> o—o a odeberu hranu, už není souvislý

$n \to n+1$

Nechť T je strom s $n+1$ vrcholy a l jeho list.

T musí být souvislý protože to je strom. Pokud odeberu $\{s, l\}$, tak l bude izolovaný a graf není souvislý.

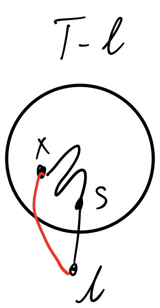
Pokud ostraním hranu mimo $\{s, l\}$, tak hranou $\{s, l\}$ to nespojím.

(1) => (5) Indukcí podle n:

$n = 1$ platí triviálně

$n \to n+1$

Nechť T je strom s $n+1$ vrcholy a listem l.



Do $T - l$ přidám hranu. Pokud se l neúčastní hrany, vznikne v $T - l$ cyklus, jelikož $T - l$ je z IP maximálně acyklický.

Pokud se l účastní, tak bych vytvořil cyklus, viz. obrázek:

(3) => (1): $\neg 1 \Rightarrow \neg 3$

T není strom

- nesouvislý — neexistuje cesta mezi x, y
- cyklický — ≥ 2 cesty mezi x, y

(4) => (1) : ¬1 => ¬4

T není strom

nesouvislý

pak není ani minimálně souvislý

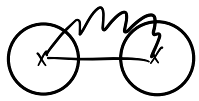
cyklický

Odebráním hrany z cyklu neporuším souvislost

(5) => (1) : ¬1 => ¬5

T není strom

nesouvislý



- Spojením dvou nesouvislých částí bych nevytvořil cyklus, jelikož pak by nemohly být nesouvislé.

cyklický

pak rozhodně není acyklický

(2) => (1)

Lemma: Pokud je G souvislý, má $n \geq 2$ vrcholů a $n-1$, pak obsahuje list.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2E \Rightarrow 2n-2$$

-> To indikuje, že některé vrcholy nemají sudý stupeň, tedy v případě stromu mají stupeň 1.

Indukcí podle n:

$n=1$ Triviální platí.

$n \to n+1$ Nechť T je strom o $n+1$ (≥ 2) vrcholech. -> splňuje tedy lemma a má list.

$T-l$ splňuje podle IP (2) a je tedy stromem.

Pak je i podle lemma výše i T stromem.

Eulerova věta:

V topologickém grafu platí:

$v + f = e + 2$, kde v je počet vrcholů, f počet stěn a e počet hran

1) Graf je strom: $v + f = v - 1 + 2$

$f = 1$ ✓

Platí

2) Indukce podle e pro nestromy: (musí být souvislý)

$e = 0$

$1 + 1 = 2$ ✓

$n \to n + 1$

Nechť je G cyklický a h jeho hrana na kružnici

Pak $G' := G - h$, tedy stále souvislý

$v' = v$

$e' = e - 1$

$f' = f - 1$

$\rightarrow v + f - 1 = e - 1 + 2$

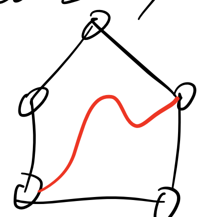
$v + f = e + 2$ ✓

Každý maximální topologický graf G s $V(G) \geq 3$ je triangulace.

① Nechť G není souvislý: pak jednoznačně existuje cesta mezi komponentami souvislosti. ↯

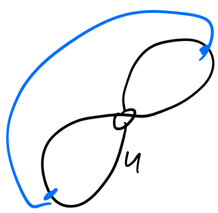
② Nechť je G souvislý a hranice stěny $\neq \triangle$

a) Mám kružnici $C_{n>3}$:



– tam uvnitř existuje nakreslený oblouk, takže nebyl maximální ↯

b) Kružnice je délky ≤ 3



Pak ale musí existovat body x, y, které mohu spojit a dostanu triangulaci a ke všemu je to spor s maximalitou!

Barevnost grafu ≤ 2 <=> G je bipartitní <=> neobsahuje lichou kružnici

=> Lichá kružnice má $\chi \geq 3$

<= Nechť T je kostra grafu/komponenty

– T je strom

– ten lze 2-obarvit

– Postupně do kostry přidávám hrany.

– Jakmile bych měl hranu, co spojuje stejné barvy, tak je to spor se sudostí kružnice, protože stejnou barvu bude mít sudé délky, tedy kružnice bude lidk. !

Rovinný graf je 6-obarvitelný:

Jelikož v rovinném grafu existuje vrchol v: $\deg_G(v) = 5$

$n=1$ triviálně platí

$n \to n+1$

Nechť G je graf s $n+1$ vrcholy.

$G' := G - v$ → takový graf z předpokladu lze obarvit.

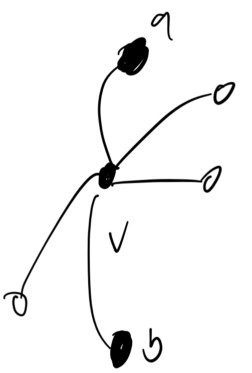
Zůstane mi zbýt 1 barva, kterou obarvím v, jelikož v má právě 6 sousedů.

$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e = 6v - 12$

$e = 3v - 6$

≤ 6

Rovinný graf je 5-obarvitelný:



1) $\exists\, a, b$ sousedé, kteří nejsou spojeni hranou – jinak by to bylo K_5
2) $G' := G - v + \{a, b\}$ zachová rovinnost
3) $G'' := G' / \{a, b\}$ stále rovinný
4) G'' lze podle IP c'' 5-obarvit
5) c' obarvení $G - v$: $c'(v) = \begin{cases} c''(u) : u \neq a, b \\ c''(x) : u = a, b \end{cases}$
6) c obarvení na G lze provést, jelikož mám 6 vrcholů obarvených, ale stále mi zbyla barva pro v.

Indukcí podle $|E|$

$|E| = 1$ ✓

$|E| \to |E| + 1$

Bayesova věta:

Pro $A \subseteq \Omega$, $B_1 \dots B_n$ rozklad Ω t.ž. $\forall i : P(B_i) \neq 0$

$$P[B_i | A] = \frac{P[A|B_i] \cdot P[B_i]}{\underbrace{\sum_j P[A|B_j] \cdot P[B_j]}_{P(A)}}$$