Fib. posloupnost @

Důkaz:

- to, co plyne z předchozích kroků a z definic

Axiomy:

- první daná tvrzení, která není potřeba dokazovat. Většinou na dně důkazových vět.

Sporem / Indukcí:

Sporem:

- předpokládáme opak a dokážeme, že takový opak neexistuje

Prvočísel je nekonečně mnoho:

Sporem: Nechť $p_1 \cdots p_n$ jsou všechny prvočísla. Pak $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = F_n$. Pak $F_n + 1$ není dělitelné žádným menším prvočíslem, tedy je taky novým prvočíslem. $\boxed{\lightning}$

Indukcí:

$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n)$

Dokážeme pro 0. Pak $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$

$\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Indukcí podle n:

$n = 0$ $\quad 2^0 = 2^1 - 1$ $\boxed{\checkmark}$

$n \Rightarrow n+1$

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + \dots 2^n}_{2^{n+1}+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

Využití indukčních předpokladů.

$$2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} \quad \boxed{\checkmark}$$

Definice čísel:

$\lfloor x \rfloor$ -> „dolní celá část" = nejbližší nižší celé číslo $\lfloor 1{,}3 \rfloor = 1$ $\lfloor -1{,}3 \rfloor = -2$

$\lceil x \rceil$ -> „horní celá část" = nejbližší vyšší celé číslo $\lceil 1{,}3 \rceil = 2$

... -> „pokračování seznamu"

Suma -> $\sum_{i=1}^{n} 2^i$ -> iterační suma $\sum i^2$ -> suma s podmínkou

/ $1 \le i \le n$ & i je prvočíslo

$\sum_{i \in \{1,2,5\}} \frac{1}{i}$ $\sum_{i \in \emptyset} = 0$

Suma součinu -> $\prod_{i=1}^{n} i = n!$, $\prod_{i=1}^{n} x = x^n$

Množiny:

$\{1,2,5\} = \{1,2,2,2,5,5\}$

$\{\} = \emptyset \neq \{\emptyset\}$

Mohutnost / kardinalita : počet prvků

$\mathbb{N}$ (přirozená čísla), $\mathbb{Z}$ (celá čísla), $\mathbb{Q}$ (racionální čísla), $\mathbb{R}$ (reálná čísla), $\mathbb{C}$ (komplex

Operace na množinách:

$x \in A$ - je prvkem , $A = A$

$A \subseteq B$ $\forall a : x \in A \Rightarrow x \in B$

$A \subset B$ $A \cap B : \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}$

$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Potence množiny $P(A) = 2^A$

$$|P(A)| = 2^{|A|} \qquad P(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Věta: Neexistuje množina všech množin.

Sporem: Nechť taková množina M existuje

$K := \{x \in M \mid x \notin x\}$ všechny krotké množiny

je krotká: $K \notin K \Rightarrow K \in K$

je divoká: $K \in K \Rightarrow K \notin K$

$\boxed{\lightning}$

Uspořádaná dvojice (x,y)

Kartézský součin $A \times B$

$:= \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

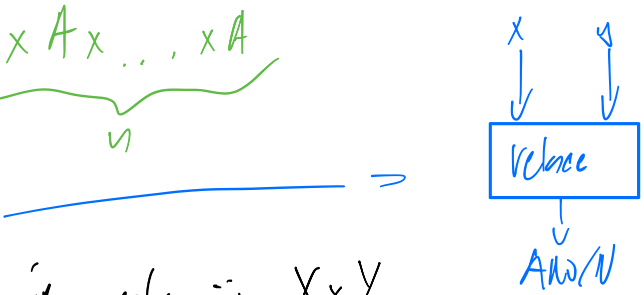
$\{1\} \times \{\alpha, \beta\} = \{(1,\alpha), (1,\beta)\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ rovina

$(a,b,c) = ((a,b),c) = (A \times B) \times C$ -> neplatí asociativita

Kartézská mocnina $A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n}$

Relace mezi množinami X, Y

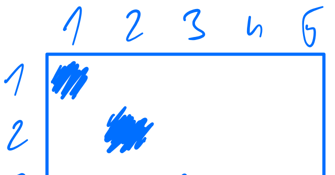


- relace mezi podmnožinami je podmnožina $X \times Y$
  - v $X \times Y$ jsou obsaženy všechny vzájemné vztahy mezi X a Y

Relace na X $\equiv$ mezi X a X

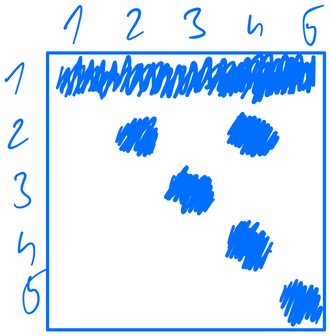
Příklady na $\{1,2,3,4,5\}$

① $x = y$ -> $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$



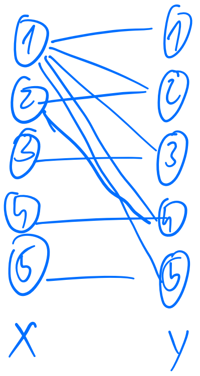
- diagonální relace $D_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$

② dělitelnost $D ::= (x,y) \in D \equiv x | y \quad (xDy)$

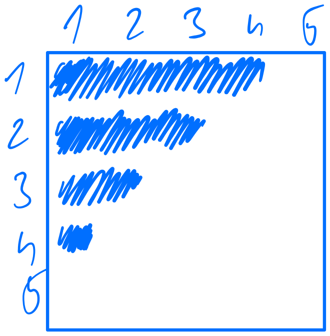


	1	2	3	4	5
1	■	■	■	■	■
2		■		■	
3			■		
4				■	
5					■

nebo



③ $xRy \equiv x + y \leq 5$



	1	2	3	4	5
1	■	■	■	■	
2	■	■	■		
3	■	■			
4	■				
5					

④ $\emptyset$ → nic vybarvené

univerzální relace

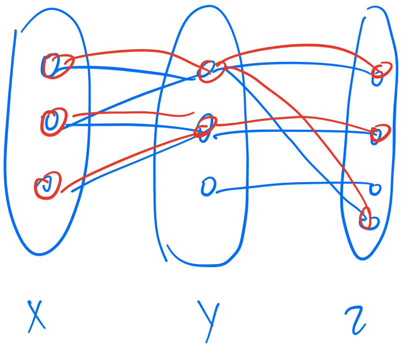
⑤ X^2 → všechno vybarvené

Inverzní relace k R mezi X a Y je R^{-1} mezi Y a X:

$xRy \equiv yR^{-1}x$

Skládání relací R mezi X a Y, S mezi Y a Z

je relace $R \circ S$ mezi X a Z t.ž. $xTz \equiv \exists y \in Y : xRy \;\&\; ySz$



Vlastnosti:

Nejsou komutativní: $R \circ S$ a $S \circ R$ jsou obecně různé

$R \circ O_Y = R$

$\Delta_X \circ R = R$

f je funkce/zobrazení z X do Y $(f: X \to Y)$

↳ f je relace mezi X a Y t.ž. $\forall x \in X\ \exists! y \in Y: xfy$

$$f(x) = y \;=\; xfy$$

$$f[S] ::= \{f(s) \mid s \in S\}$$

Příklady:

① identita (diagonála) $f(x) = x$ $\quad \Delta_X\ f: X \to X$

② $\sin: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

③ $\mathrm{sgn}: \mathbb{R} \to \{\underset{x<0}{-1}, \underset{x=0}{0}, \underset{x>0}{1}\}$

④ $\mathrm{card}: 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

⑤ $f(x, y) = a \quad f: X \times Y \to A$

Vlastnosti:

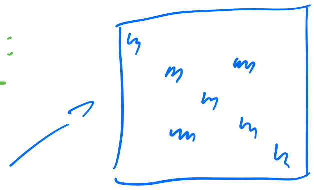
Funkce f z X do Y je:

- prostá $\equiv \forall x, x' \in X,\ x \neq x': f(x) \neq f(x')$
- „na" $\equiv \forall y \in Y\ \exists x \in X: f(x) = y$ - Y je plně zaplněno
- bijekce $\equiv \forall y \in Y\ \exists! x \in X: f(x) = y$

Mějme f a g funkce.

Pak $f \circ g$ je opět funkce: $g(f(x))$

Nechť R je relace na X. Potom R je:



diagonála

$\Delta_X \subseteq R$ • reflexivní $\equiv \forall x \in X: xRx$

$R = R^{-1}$ • symetrická $\equiv \forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$

- antisymetrická ≡ $\forall x,y \in X : xRy \,\&\, yRx \Rightarrow x=y$

  – takže to nastane protějšky jen na diagonále

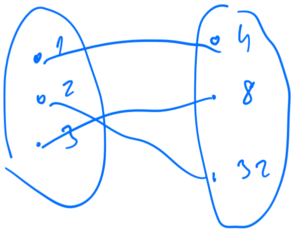
$R \circ R \subseteq R$ • tranzitivní ≡ $\forall x,y,z \in X : xRy \,\&\, yRz \Rightarrow xRz$

Ekvivalence:

relace R na X je ekvivalence, jakmile je reflexivní, symetrická a tranzitivní

① $\mathbb{N}, =$ ② $xRy \equiv 7 \backslash x-y$ ③ shodnost trojúhelníků v rovině

④ $2^{\mathbb{N}}$



$ARB \equiv \exists f : A \to B$, která je bijekce

Ekvivalenční třídy:

Nechť R je ekvivalence na X. $R[x] := \{y \in X \mid xRy\}$

$x \in X$ ekvivalenční třída prvku x

V rámci ekvivalence je každé číslo v právě jedné ekv. třídě.

Ekvivalence rozdělí na disjunktní podmnožiny ekvivalenčních tříd.

Věta o ekvivalenčních třídách:

Pro každou ekvivalenci R na X:

① $\forall x \in X : R[x] \neq \emptyset$ $x \in R[x]$ Důkaz ① - identita

② $\forall x,y \in X : R[x] = R[y] \vee R[x] \cap R[y] = \emptyset$ disjunkce podmnožin

③ $\{R[x] \mid x \in X\}$ jednoznačně definuje R (*)

Důkaz ③ $y \in R[x] \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow yRx \Leftrightarrow x \in R[y]$

symetrie ekv. → množina jednotlivých tříd

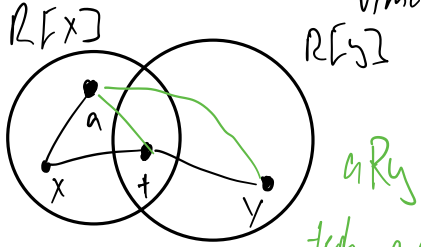
$xRy \Leftrightarrow \exists A \in \{\ldots\}_{(*)}, \{x,y\} \subseteq A$

Důkaz ② $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$ → pak symetrie $\subseteq, \supseteq \to =$

pak $R[x] = R[y]$ (stačí $R[x] \subseteq R[y]$)

Chceme: $\forall a \in R[x]: a \in R[y]$ $\quad xRa$ (symetrie) $\rightarrow aRx$

Víme: $\exists t \in R[x] \cap R[y] \rightarrow xRt, yRt$



aRy, tedy $a \in R[y]$

aRt (symetrie) tRa

a je prvkem $R[y] \leftarrow \boxed{yRa}$

Rozklad množiny:

$\mathcal{Y}$ je rozklad množiny $X \equiv$

① $\mathcal{Y} \subseteq 2^X$

② $\emptyset \notin \mathcal{Y}$

③ $\forall A, B: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

④ $\bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A = X$

Relace R na X je (částečné) uspořádání $\equiv$

R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní

Částečně uspořádaná množina $(X, \preceq)$

$\hookrightarrow$ x, y jsou porovnatelné $\equiv x \preceq y \vee y \preceq x$

$\hookrightarrow$ $\preceq$ je lineární $\equiv \forall x, y \in X$: x a y jsou porovnatelné

$\hookrightarrow$ ostré uspořádání $\equiv \prec$ na X: $x \prec y \equiv x \preceq y \;\&\; x \neq y$

Příklady:

① $(\mathbb{Z}, \leq)$ lineární ② $(\mathbb{Q}, \leq)$ lineární

③ (X, Δ_X) ④ $(\mathbb{Z}^+, \backslash)$ částečné ⑤ $(2^X, \subseteq)$

dělitelnost

⑥ Lexikografické

Nechť $(X, \leq)$ je lineární uspořádání.

$(X^2, \leq_{lex})$: $(a_1, a_2) \leq_{lex} (b_1, b_2)$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad |||$

je lineární $\quad a_1 < b_1 \vee a_1 = b_1 \;\&\; a_2 \leq b_2$

$(X^n, \leq^n_{lex})$ $\quad (a_1 \ldots a_n) \leq^n_{lex} (b_1 \ldots b_n)$ $\qquad \nearrow$ rekurzivně

$|||$

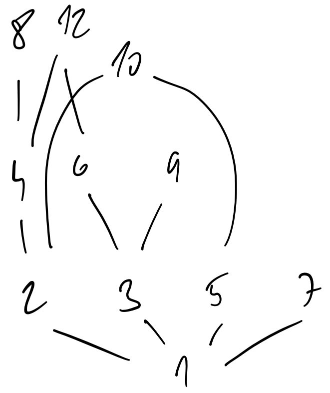
$a_1 < b_1 \vee a_1 = b_1 \;\&\; (a_2 \ldots a_n) \leq^{n-1}_{lex} (b_2 \ldots b_n)$

Relace bezprostředního předchůdce: $\triangle$ na X

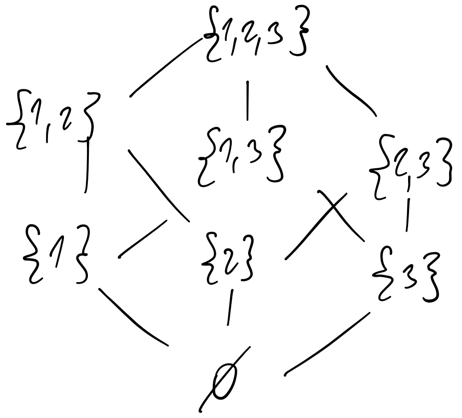
$x \triangle y \equiv x < y \;\&\; \nexists z: x < z < y$

Hasseův diagram:

$(\{1 \ldots 12\}, \backslash)$



$(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$



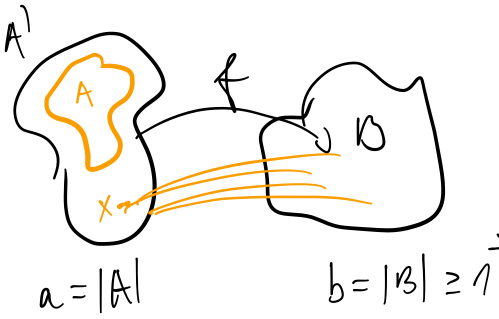
Nejmenší prvek $x \equiv \forall y \in X: x \leq y$

Minimální prvek $x \equiv \nexists y \in X: y < x$

Stejné největší a maximální

Řetězec $\equiv \forall a,b \in A$ porovnatelné

Antiřetězec $\equiv \forall a,b \in A: a \neq b$ neporovnatelné



$\# f: A \to B$

$\underline{\# b^a}$

$[n] := \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$\# f: A \to B = b^a$

Dk: podle a:

① $a = 0$

$\# f = 1 = b^0 \boxed{\checkmark}$

② $a \to a+1$ Nechť A' je $(a+1)$ prvková

zvolíme $x \in A'$

položíme $A := A' \setminus \{x\}$

Funkce $f': A' \to B$ je určena:

① $f'(x)$ … b možností

② $f := f' \upharpoonright A$ $f: A \to B$ … b^a

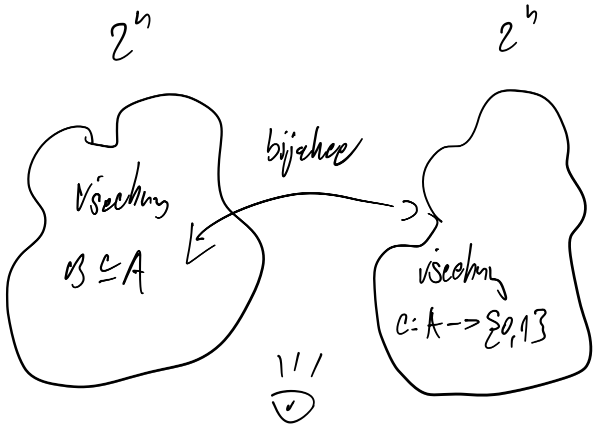
Celkem b^{a+1} možností $\boxed{\checkmark}$

alternativně

$\# f: [a] \to [b] = b^a$

N-prvková množina má 2^n podmnožin

nebo: $|2^{[n]}| = 2^n$



bijekce musí být stejně velké

Charakteristická funkce podmnožiny

Pro $B \subseteq A$ def: $C_B : A \to \{0,1\}$

$$\forall a \in A: C_B(a) := \begin{cases} 0 & a \notin B \\ 1 & a \in B \end{cases}$$

Důkaz: Jelikož mám bijekci mezi C_B a $B \subseteq A$, mají stejný počet prvků. U C_B je počet 2^n, jelikož u každého mám možnost pouze 0/1

Pro $n > 0$ je $|\mathcal{Y}| = |\mathcal{L}| = 2^{n-1}$

$\mathcal{Y} := \{A \subseteq [n] \mid |A| \text{ je sudé}\}$

$\mathcal{L} := \{A \subseteq [n] \mid |A| \text{ je liché}\}$

Důkaz:

① $|\mathcal{Y}| = |\mathcal{L}|$ – vytvořit bijekci

$f: \mathcal{Y} \to \mathcal{L}$ $f(S) := S \triangle \{h\}$ → $h \in [n]$ zvolené pevně

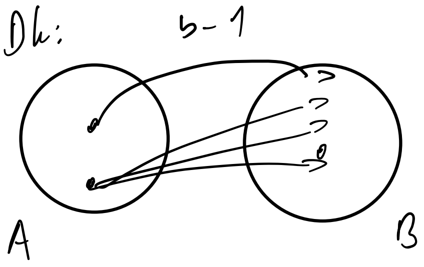
$f^{-1} = f$, tedy je bijekce

② $|Y| + |Y| = 2^n$

$\# f : [a] \to [b]$ prostých $= \underbrace{b \cdot (b-1) \cdot \ldots \cdot (b-a+1)}_{a \text{ členů}}$

pro 1. a → b
pro 2. a → b−1
⋮
pro poslední a → 1

Dk:



$\to = b^{\underline{a}}$ (klesající mocnina)

$b^{\underline{0}} = 1$

$f : [k] \to A \overset{\text{bijekce}}{\longleftrightarrow} A^k$

$\# f = |A|^k$

↳ & jsou prosté

↳ & bez opakování

Permutace na $A^{|A|=a}$ → $f : A \to A$ bijekce

$\# f = a^{\underline{a}} = a!$

↓

lineární uspořádání (pořadí)

$f : [a] \to A$ bijekce

$\# f = a^{\underline{a}} = a!$

Neuspořádané k-tice z A $(|A| = a)$

⇕ jako k-prvkové podmnožiny

Počet k-prvkových podmnožin a-prvkové množiny je $\frac{a^{\underline{k}}}{k!}$

Dk: (počítání dvěma způsoby)

→ # uspořádaných k-tic bez opakování $= a^{\underline{k}}$ ⇢ prosté funkce $[k] \to [a]$

(# k-prvkových podmnožin)·(# počet uspořádání k prvků) $= (?) \cdot (k!) = a^{\underline{k}}$

$? \to \frac{a^{\underline{k}}}{k!}$

toto lze i pomocí char. funkce:

$\boxed{10010011110000110011}$

k - jedniček

$\binom{n}{k}$ kombinační číslo / binomický koeficient

$$:= \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad \text{pro } 0 \le k \le n \quad \nearrow \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

význam: „Kolik k-prvkových podmnožin má n-prvková množina"

$$\binom{A}{k} := \{B \subseteq A \mid |B| = k\} \qquad \binom{|A|}{k} = \left|\binom{A}{k}\right|$$

Vlastnosti kombinačních čísel:

$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

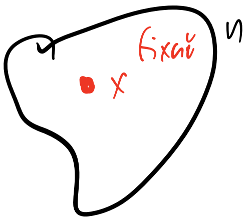
$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ bijekce (n-k) podmnožina je jednoznačně určena k množinou.

<=> je jednoznačně určena tím, co jsem do ní nedal

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ → počet všech podmnožin

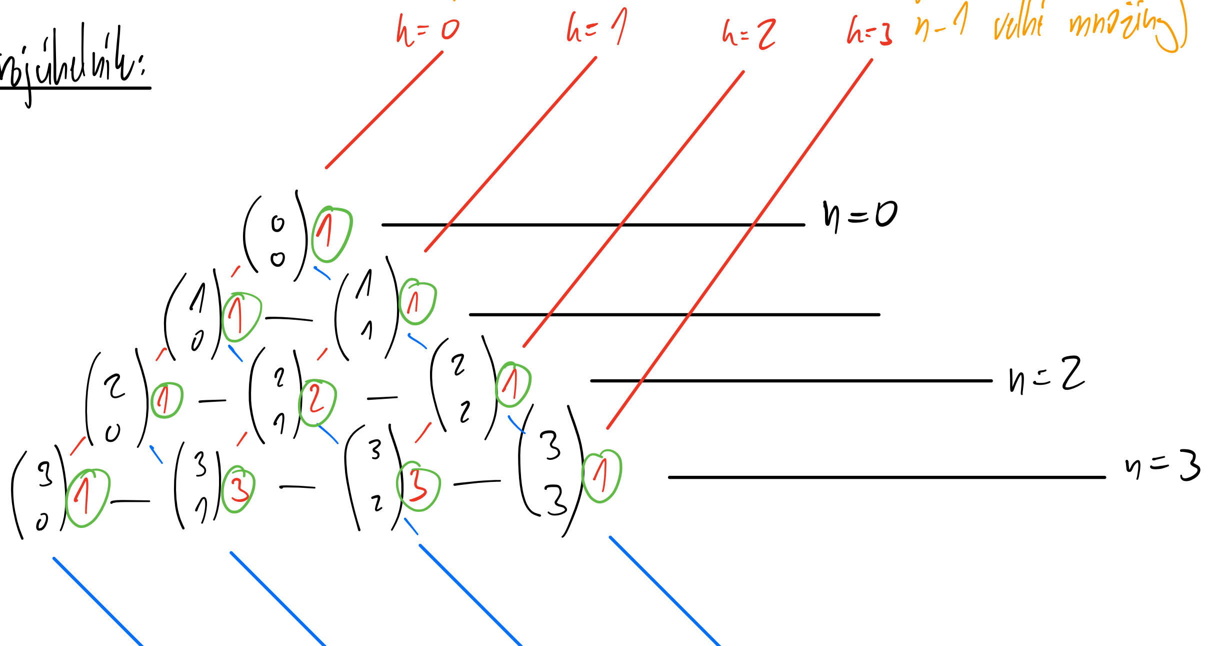
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

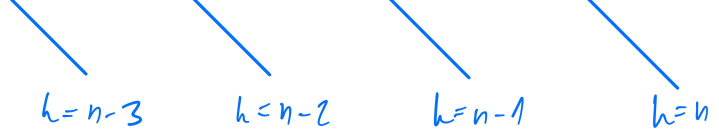


→ k-prvkové podmnožiny neobsahující x

→ k-1 prvkové podmnožiny obsahující x (obsahují totiž k-1 prvků z n-1 velké množiny)

Pascalův trojúhelník:





Binomická věta:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Důkaz:

$$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n} \rightarrow \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

→ vybírám si, kolik „b-ček" budu roznásobovat

↘ a to všechno tolikrát kolikrát si z n-závorek můžu vybrat k béček. (ze zbylých použiju b-čko)

Praktické důsledky:

$a=b=1$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1$$

$a=1, b=-1$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{n} \ldots$$

/ sudých a lichých množin je stejně

T - $|T| = 11$

K - $|K| = 7$

E - $|E| = 5$

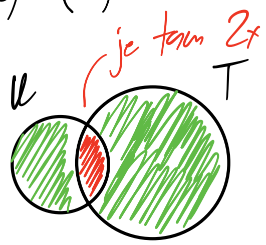
$|T \cap K| = 4$

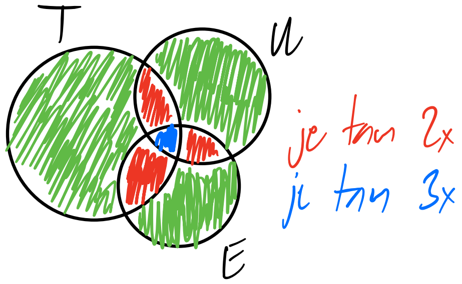
$|T \cap E| = 2$

$|K \cap E| = 3$

$|T \cap K \cap E| = 1$

$$T + K = |T| + |K| - |T \cap K|$$





PIE

$$\underline{|T \cup E \cup K|} = \underline{|T|} + \underline{|E|} + \underline{|K|} - \underline{|T \cap K|} - \underline{|T \cap E|} - \underline{|K \cap E|} + \underline{|T \cap K \cap E|}$$

Princip inkluze a exkluze:

Nechť $A_1 - A_n$ jsou konečné množiny. Potom:

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}$$

Alternativně:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Důkaz #1:

- kolikrát každý prvek přispěje do L a R.

Uvažme $a \in \bigcup_i A_i$

Nalevo přispěje 1

Napravo přispěje ?

Nechť a patří do právě p množin A_i.

průniky k-tic

$k > p$: $a \notin \bigcap$

alespoň v jedné množině není, není tedy v průniku

$k = p$: $(-1)^{k+1}$

$k < p$: $(-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{k}$

v kolika celkem podmnožinách může být.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{k} = \binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \ldots - \ldots + (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{p} = \circledast$$

podle Binomické věty: $0 = (1-1)^p = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \ldots + \ldots + (-1)^{p} \cdot \binom{p}{p}$

$$= 1 - \circledast \Rightarrow \circledast = 1$$

Charakteristická funkce C_X

$A := \bigcap_i A_i$

pro $X \subseteq A$: $C_X : A \to \{0;1\}$

$$C_X(a) \begin{cases} 0 \\ 1 & \text{pro } a \in X \end{cases}$$

$C_X \cdot C_Y = C_{X \cap Y}$

$\sum_{a \in A} C_X(a) = |X|$

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$$
$$\Downarrow$$
$$C_{\overline{X}} = 1 - C_X$$
$$\Downarrow$$
$$1 - C_{X \cup Y} = (1 - C_X) \cdot (1 - C_Y)$$

<u>Důkaz #2:</u>

x_1 — x_n jsou proměnné:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} x_i \longrightarrow \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)}_{1 - C_{\bigcup_i A_i}} = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \underbrace{\prod_{i \in I} x_i}_{C_{\bigcap_{i \in I} A_i}}$$

$x_i := C_{A_i}$

$$\longrightarrow \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)}_{1 - C_{\bigcup_i A_i}} = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \underbrace{\prod_{i \in I} x_i}_{C_{\bigcap_{i \in I} A_i}} + 1$$

$x_i := C_{A_i}$

$$\longrightarrow \cancel{1} - C_{\bigcup_i A_i} = \left(\sum_{\emptyset \neq I \in [n]} (-1)^{|I|+1} \cdot C_{\bigcap_{i \in I} A_i} \right) + \cancel{1}$$

$$\underbrace{\sum_a C_{\bigcup_i A_i}(a)}_{\left|\bigcup_i A_i\right|} = \sum_{\emptyset \neq I \in [n]} (-1)^{|I|+1} \underbrace{\sum_a C_{\bigcap_{i \in I} A_i}(a)}_{\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|}$$

Šatnářka:

$S_n := \{ \pi \mid \pi \text{ je permutace na } [n] \}$

$\pi(i) = i$ —> pevný bod (hodnota, pro kterou to vrátí tu stejnou hodnotu.

$\check{S}_n := \left| \{ \pi \in S_n \mid \nexists i : \pi(i) = i \} \right|$ → tedy že tam neexistuje pevný bod

$$P[\text{nikdo nedostane svůj klobouk}] = \frac{\check{S}_n}{|S_n|} = \frac{\check{S}_n}{n!}$$

Budeme počítat s alespoň jedním pevným bodem:

$A := \{ \pi \in S_n \mid \exists i : \pi(i) = i \}$

$A_i := \{ \pi \in S_n \mid \pi(i) = i \}$

$A = \bigcup_i A_i$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$|A_i| = (n-1)!$

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$$|A| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot (n-k)!$$

$$= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

$$\check{S}_n = n! - |A| = n! \left(\cancel{1 -} \sum_{k=\cancel{1}0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right)$$

$$\check{S}_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!}$$

Odhad faktoriálu:

① $2^{n-1} \le n! \le n^n$

② $n^{n/2} \overset{①}{\le} n! \overset{②}{\le} \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

$1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdots n\cdot n$

$(n!)^2 = 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots n^2$

$= (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot(3\cdot(n-2))\_\_\cdot(n\cdot 1)$

$n! = \sqrt{1\cdot n}\cdot\underbrace{\sqrt{\underbrace{2(n-1)}_{\ge n}}}_{\ge\sqrt{n}}\cdot\sqrt{3(n-2)}\cdots\sqrt{n\cdot 1}$

$\overset{||}{①\; n^{\frac12}}$ – těch je n, takže $\underline{\underline{n^{\frac n2}}}$

proč pod odmocninou $\ge n$?

$i\cdot(n-i+1)$

$i=1 \Downarrow \underline{n}$

$i=n \Downarrow \underline{\underline{n}}$

ostatní $\Downarrow$

min ≥ 2

max $\ge \frac n2$

součet tedy $2\cdot\frac n2 = \underline{\underline{n}}$

$\sqrt{2(n-1)} \le \frac{n+1}{2}$

② podle AG nerovnosti:

$\sqrt{2(n-1)} \le \frac{2+n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$

Věta AG nerovnost:

Pro $x,y>0$

$$\sqrt{x\cdot y} \le \frac{x+y}{2}$$

Důkaz:

$0 \le (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$2ab \le a^2+b^2$

$ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$

$a := \sqrt{x}$

$b := \sqrt{y}$

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{x\cdot y} = \frac{x+y}{2}$ $\boxed{\checkmark}$

$n^{n/2} \overset{①}{\le} n! \overset{②}{\le} \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

$\frac12 n\log n \le \log n! \le n\cdot\underbrace{\log\frac{n+1}{2}}_{\log n}$

$\left(\frac{n+1}{2}\right)$ je nejvýš n, tedy

$\frac12 n\log n \le \log n! \le \log n \Rightarrow \underline{\underline{\log n! \text{ je } \Theta(n\log n)}}$

Odhad kombinačního čísla:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le n^k$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

1,75 2 2,5 4

$$\frac{n}{k} \le \frac{n-1}{k-1}$$

$$n\cdot(k-1) \le (n-1)\cdot k$$

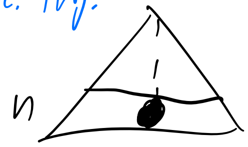
$$nk - n \le nk - k$$

$$n \ge k \quad \boxed{\checkmark}$$

To je u každého komb. čísla!

Odhad $\binom{2n}{n}$

- odhad maxima z řádku Pasc. troj.



$$\frac{4^n}{2n+1} \le \binom{2n}{2} \le 4^n$$

min ≤ průměr ≤ max

součet v řádku je 2^n

max ≤ Σ

Konec kombinatoriky!

Grafy

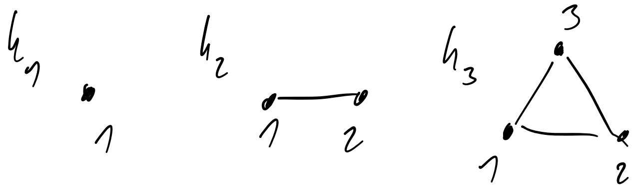
Graf je (V, E), kde:

- V konečná neprázdná množina vrcholů
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ —> „množina nějakých dvouprvkových podmnožin V" je množina hran.

G, $V(G)$, $E(G)$

graf, jeho hrany, jeho vrcholy

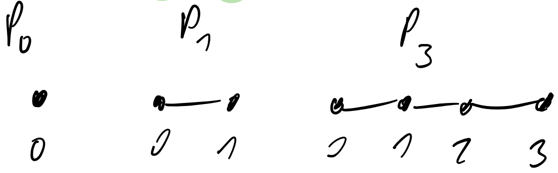
Úplný graf K_n



$V(K_n) := [n]$

$E(K_n) := \binom{V(K_n)}{2}$

Cesta P_n



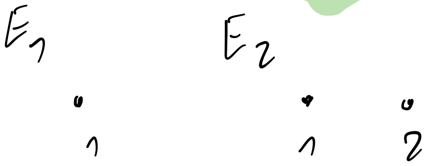
$V(P_n) := [n]$

$E(P_n) := \{\{i, i+1\} \mid 0 \leq i < n\}$

Rozšíření:

- orientace hran
- smyčky
- multigrafy
- nekonečné grafy
- ohodnocený graf

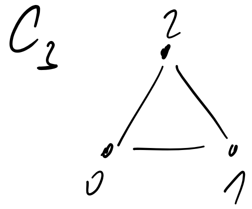
Prázdný graf E_n

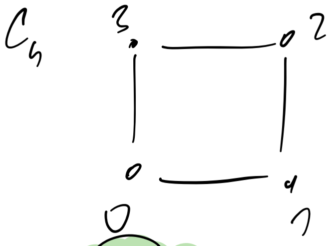


$V(E_n) := [n]$

$E(E_n) := \emptyset$

Kružnice C_n

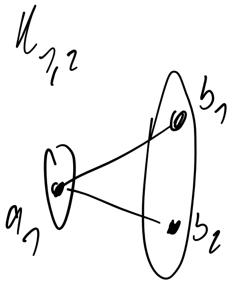


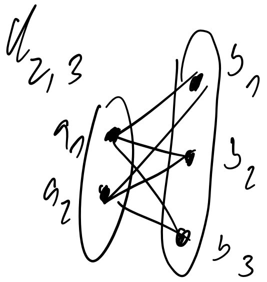


$V(C_n) := [n-1]$

$E(C_n) := \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i < n\}$

Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$





$V(K_{m,n}) := \{a_1 - a_m\} \cup \{b_1 - b_n\}$

$E(K_{m,n}) := \{\{a_i, b_j\} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$

Graf (V,E) je bipartitní ≡

$\exists V_1, V_2$ rozklad V t.ž. $E \subseteq \{\{a_1, a_2\} \mid a_1 \in V_1, a_2 \in V_2\}$ nebo

$\forall e \in E: |e \cap V_1| = 1$

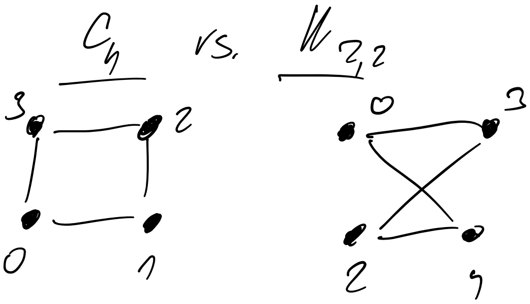
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$V_1 \cup V_2 = V$

partita grafu není jednoznačně určena!

Co je bipartitní graf?

- Všechny sudé kružnice
- Všechny cesty
- Všechny prázdné grafy
- Úplný graf – K_1, K_2, ostatní už ne.



Isomorfismus mezi grafy: Grafy (V,E) a (V',E') jsou isomorfní ≡

$\exists \overset{\text{bijekce}}{f}: V \to V'$ t.ž. $\forall a,b \in V: \{a,b\} \in E \iff \{f(a), f(b)\} \in E'$

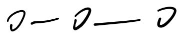
Značí se $G \cong G'$ – chová se jako Ekvivalence na libovolné množině grafů

Příklady isomorfismů:

$C_3 \cong K_3$

$K_{1,1} \cong P_1 \cong K_2$

$P_2 \cong K_{1,2}$

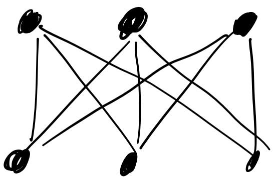


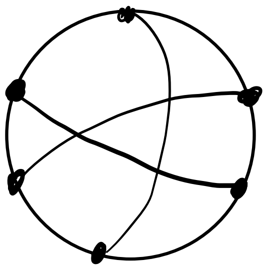
$C_4 \cong K_{2,2}$

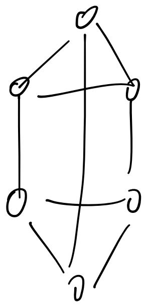
$E_1 \cong P_0 \cong K_1$

$K_{3,3} \cong H \not\cong K_5$ – nesedí počet vrcholů

$\not\cong K_6$ – nesedí počet hran





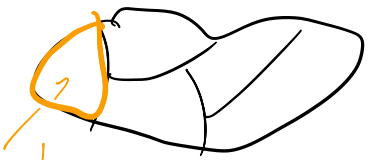


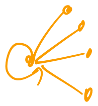
– takhle není, protože v tom jsou trojúhelníky, které nejsou bipartitní.

grafů na $[n]$ ↙ vrcholy

$= 2^{\binom{n}{2}}$ → mám $\binom{n}{2}$ dvojic vrcholů a u každé se rozhodnu, zda bude mezi nimi hrana >

neisomorfních grafů na $[n]$

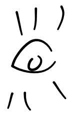




$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \le$ # neisomorfních grafů na $[n]$ $\le 2^{\binom{n}{2}}$

↗ resp. počet těch tříd

↘ každá třída obsahuje nejvýše n! podgrafů



$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$$

Stupeň vrcholu $v \in V(G)$:

je $\deg_G(v) := |\{e \in E(G) | v \in e\}|$

Regulárnost grafu / graf je k-regulární ≡

$\forall v \in V(G): \deg_G(v) = k$

– isomorfismus zachovává množinu všech stupňů grafu

Princip sudosti:

vrcholů lichého stupně je sudý, resp. součet všech stupňů je vždy sudý

Skóre grafu:

Posloupnost stupňů vrcholů

Graf $G'(V',E')$ je podgrafem $G(V,E)$ $\quad G' \subseteq G \equiv$

$$V' \subseteq V \;\&\; E' \subseteq \binom{V'}{2}$$

$\longrightarrow$ $\subseteq$ na množině grafů je uspořádání

Indukovaný graf $G[V']$ je graf indukovaný množinou $V' \subseteq V(G)$:

$= (V', E')$, kde $E' = E(G) \cap \binom{V'}{2}$

$\rightarrow$ podgraf, který obsahuje všechny možné hrany z původního grafu.

Cesta v grafu $G \equiv$

$$G' \subseteq G \text{ t.ž. } \exists n : P_n \cong G'$$

Nebo:

$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$, kde $v_0 - v_n$ jsou navzájem různé vrcholy G

a $\forall i \; e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

Kružnice v grafu $\equiv$

① $G' \cong C_n$

② výjimka: $V_0 = V_n$ & ≥ 3

Souvislý graf G je souvislý $\equiv$

$\forall u,v \in V(G)$ $\exists$ cesta v G mezi u,v

Komponenty souvislosti jsou podgrafy indukované ekv. třídami relace $\sim$.

- komponenty jsou souvislé
- graf je souvislý, pokud má jednu komponentu.

Dosažitelnost v grafu:

Relace $\sim$ na $V(G)$:

$u \sim v \equiv \exists$ cesta v G mezi u,v

Lemma: $\sim$ je ekvivalence

Důkaz: $\forall u: u \sim u$

$\forall u,v: u \sim v \iff v \sim u$

$\forall u,v,w: u \sim v \;\&\; v \sim w \Rightarrow u \sim w$

Podle lemmatu: $\nearrow$?

můžu cesty vystřihnout, tedy pokud existuje „cyklus", vynechám ho a mám cestu.

Sled v grafu: (vrcholy/hrany se smí opakovat)

$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 - e_n, v_n)$

kde $v_0 - v_n \in V(G)$ a $\forall i: e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

existuje uzavřený/otevřený

$v_0 = v_n \quad v_0 \neq v_n$

Matice sousednosti $A(G)$

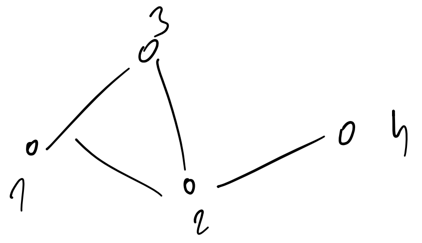
grafu G s vrcholy $\{v_1 - v_n\} = V(G)$

je matice $n \times n$

$$\forall i,j: A_{ij} = \begin{cases} 0 & \\ 1 & \{v_i, v_j\} \in E(G) \end{cases}$$

A je symetrická

$$\forall i: \sum_j A_{ij} = \deg(v_i)$$



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ 2 & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{\sum_i A^3_{ii}}{6} = \#\text{ trojúhelníků}$$

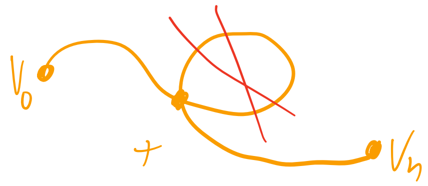
z každého vrcholu vedou 2 cesty, kudy jít...

Lemmátko:

∃ sled mezi u,v <=> ∃ cesta mezi u,v

Dk: Pokud se nějaký vrchol t objeví alespoň 2krát:

$$(v_0, e_1, v_1, e_i, \underset{\overset{\|}{t}}{v_i}, e_{i+1} \dots e_j, \underset{\overset{\|}{t}}{v_j}, e_{j+1}, \dots e_n, v_n)$$



$S' := (v_0, e_1, v_1, e_i, v_i, e_{j+1}, \dots e_n, v_n)$

↻ opakuji, dokud existuje nějaký vrchol 2x. Pak dostanu cestu.

$A_{ij} = [\{v_i, v_j\} \in E(G)]$ → indikátor

→ tohle se dá takhle zapsat na indikátory

$$A^2_{ij} = \sum_k A_{ik} \cdot A_{kj} = \#\text{ sledů délky 2 z } v_i \text{ do } v_j.$$

A^t_{ij} = # sledů délky t z v_i do v_j

Důkaz: $t=0 \qquad A^0 = I_n$

① $t=1 \qquad A^1 = A$

② Nechť t → pak $t+1$:

$$A^{t+1}_{ij} = (A^t \cdot A)_{ij} = \sum_k A^t_{ik} \cdot A_{kj}$$

tedy počet sledů délky $t+1$, kdy jejich poslední hrana vede do v_j.

počet sledů délky t z v_i do v_k.

Vzdálenost v souvislém grafu G je:

$d_G : V(G)^2 \to \mathbb{N}$ t.j. $\forall u,v \in V(G) : d_G(u,v) :=$ minimum z délek cest mezi u,v

Vlastnosti:

① $d(u,v) \geq 0$

② $d(u,v) = 0 \iff u = v$

③ $d(u,v) = d(v,u)$

④ $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ → trojúhelníková nerovnost

vlastnosti metriky

Operace s grafy

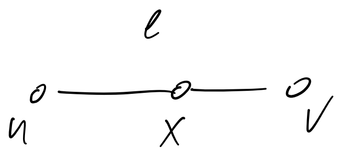
$G + v$ přidání vrcholu: $V' = V \cup \{v\}$, $E' = E$

$G + e$ -||- hrany

$G - v$ smazání vrcholu $G[V(G) \setminus \{v\}]$

$G - e$ -||- hrany

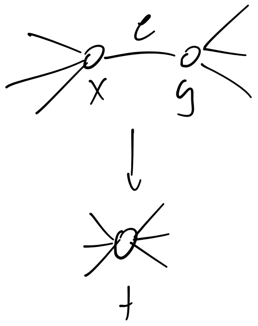
$G \% e$ dělení hrany



→ přidán vrchol x

$$\hookrightarrow G - e + \underset{\substack{\uparrow \\ x \in V(G)}}{x} + \{u,x\} + \{x,v\}$$

G / e kontrakce hrany



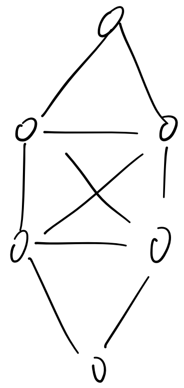
$G/e = \{x,y\} := G' = (V', E')$

t.ž. $V' = V \setminus \{x,y\} \cup \{t\}$

kde $t \in V$

$$E' = \left(E \cap \binom{V'}{2}\right) + \{\{v,t\} \mid v \in V \ \& \ (\{v,x\} \in E \vee \{v,y\} \in E) \ \& \ v \neq x,y\}$$

Tah je sled bez opakování hran.



Eulerovský tah

- obsahuje všechny vrcholy a hrany
- uzavřený eul. tah $\to$ vše výše + skončím tam, kde jsem začal.

Eulerovský graf $\equiv$

existuje v něm uzavřený eulerovský tah

Eulerova věta:

Graf G je Eulerovský $\iff$ G je souvislý & $\forall v \in V(G): \deg_G(v)$ je sudý

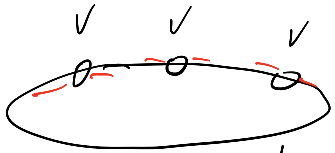
Důkaz:

$\Rightarrow$: ① G je souvislý : mějme vrcholy u,v

$T :=$ část eul. tahu mezi jakoukoli návštěvou u,v

$\exists$ sled mezi u,v $\Rightarrow$ $\exists$ cesta mezi u,v

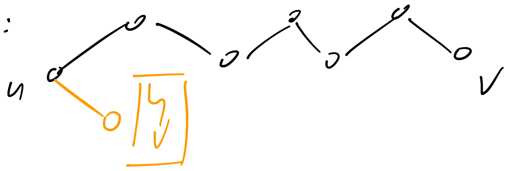
② G má sudé stupně



- každý výskyt v musí mít okolo sebe dvě hrany. Tyto hrany budou odlišné, jinak by šlo o smyčky a ty jsou zakázané.

$\Leftarrow$: Nechť T je tah s max # hran.

① T je uzavřený: Sporem:

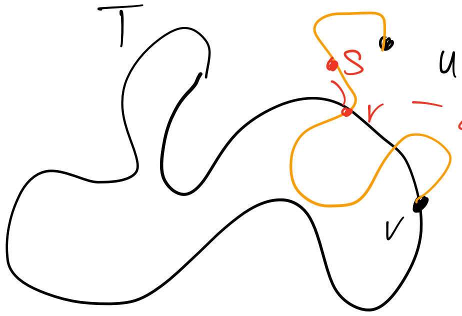


- každý otevřený můžu ještě prodloužit.

② Pokud $\{u,v\} \in E$, $u,v \in T$, pak $\{u,v\} \in T$: Sporem:

- když cyklus otevřu a na jeden konec napojím $\{u,v\}$, dostanu delší graf než maximální dlouhý

③ $\forall u \in V: u \in T$: Sporem:



— $\{r,s\}$ jsem tam mohl přidat a T by bylo delší

zvolíme $u \notin T$, $v \in T$, P cesta mezi u,v.

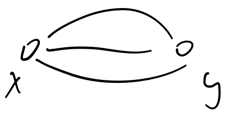
Najdeme r,s sousedy na P t.ž. $r \in T$, $s \notin T$

Tah T rozpojíme v r a připojíme $\{r,s\}$ $\boxed{↯}$ → opět jsem pak měl delší.

Otevřený eul. tah ≡

souvislý & právě dva vrcholy mají lichý stupeň.

Multigraf:



E libovolná konečná množina „abstraktní hrany"

end: $E \to \binom{V}{2} \cup V$

- pozor = ve smyčce každá hrana přidá vrcholu stupeň +2.

Orientovaný graf:

$$E \subseteq V^2 \setminus \underbrace{\{(x,x) \mid x \in V\}}_{\Delta_V} \iff \text{ireflexivní relace na } V$$

Vstupní/Výstupní stupeň vrcholu:

$$\sum_v \deg^{in}(v) = \sum_v \deg^{out}(v) = |E|$$

$\deg^{in}(v)$ - počet hran, co přichází

$\deg^{out}(v)$ - počet hran, co odchází

Zorientování grafu

– z neorientovaného udělám orientovaný, žádné nové hrany nepřidávám.

Podkladový graf G^o pro orientovaný G:

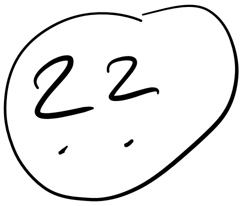
$$V(G^o) := V(G)$$

$$E(G^o) := \{\{u,v\} \mid (u,v) \in E(G) \vee (v,u) \in E(G)\}$$

Orientovaný graf G je souvislý:

slabě ≡ G^o je souvislý („drží pohromadě")

silně ≡ $\forall u,v \in V(G)\ \exists$ cesta v G z u do v.



Graf G je vyvážený ≡ $\forall v \in V(G) : \deg^{in}(v) = \deg^{out}(v)$

Pro orientovaný graf G je ekvivalentní:

① G je vyvážený a slabě souvislý

② G je eulerovský

③ G je vyvážený a silně souvislý

Důkaz: kruhem

③ => ① Silná souvislost je silnější než slabá a tedy obsahuje i slabou.

② => ③ Z každého vrcholu existuje cesta, je vyvážený.

① => ② Jakmile má stejný $\deg^{in/out}$, musím se dostat všude a takový tah bude nejdelší.

Strom je souvislý acyklický graf

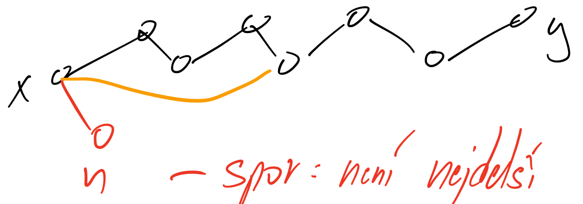
Les je acyklický graf

List je vrchol stupně 1

Lemma o koncovém vrcholu:

Strom o alespoň dvou vrcholech má alespoň 2 listy.

Dk: Uvažme nejdelší cestu C



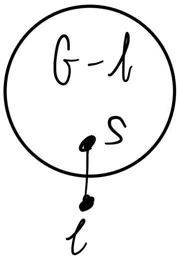
− spor: není nejdelší

− spor: existuje cyklus, není strom

→ x, y jsou listy. Kdyby nebyli, mají stupeň větší než jedna, tedy do nich vede další hrana

Lemma: Nechť l je list grafu G. Pak G je strom <=> G − l je strom

Dk: =>



1) G − l je souvislý

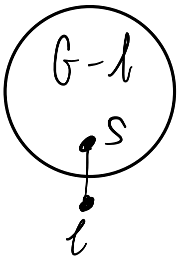
- pokud l není x, y, pak nebyla porušena cesta, jelikož l je list, tedy má $\deg(l) = 1$.

$\forall x,y \ \exists$ cesta mezi x, y v G.

2) G − l je acyklický

- pokud $C_c \subseteq G - l$, pak $C_c \subseteq G$

<=



1) G je souvislý

pro x, y ≠ l stále propojeny cestou

x, l
ze souvislosti G − l existuje cesta mezi x, s. Tedy existuje i v G. Přidáním hrany s, l vznikne cesta mezi x, l

2) G je acyklický

- jelikož l je list, tak neleží na kružnici.
- pokud $C_c \subseteq G$, pak $C_c \subseteq G - l$.

(pokud, tak už tam byla)

Strom na n-vrcholech má $n-1$ hran.

Dk: indukcí podle n:

① $n=1$ $E(G)=0$

② $n \to n+1$

Nechť T je strom, kde $|V(T)| = \overset{\geq 2}{n+1}$

$\Rightarrow$ lemma 1: Strom o alespoň 2 vrcholech má alespoň dva listy.

$\searrow$ je to taky strom

$\Rightarrow$ lemma 2: Nechť T je strom, pak $T-\ell$ je taky strom

$\searrow$ $T-\ell$ je taky strom (n vrcholů)

$\Rightarrow$ IP: $T-\ell$ má $n-1$ hran

$\searrow$ pak T má n hran $\boxed{\checkmark}$

Charakterizace stromů:

Pro graf G jsou následující ekvivalentní

① G je souvislý a acyklický — Je to strom.

② G je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$ — Eulerova formule

③ $\forall x,y \in V(G)$ $\exists!$ cesta v G mezi x,y — Jednoznačná souvislost

④ G je souvislý & $\forall e \in E(G)$: $G-e$ je nesouvislý — Minimální souvislost

⑤ G je acyklický & $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$: $G+e$ obsahuje kružnici. — Maximální acykličnost

① $\Rightarrow$ ② Viz: Strom na n-vrcholech má $n-1$ hran.

① => ③ Indukcí podle n:

$\forall n \ \forall G$ o n vrcholech ① => ③

1) $n = 1$ – strom o 1 vrcholu má právě žádnou cestu a ta je triviální jednoznačná

2) $n \to n+1$

Buď T strom s $n+1$ vrcholy a l jeho list

$x, y \neq l$ – $T - l$ je podle předpokladu souvislý acyklický strom.
– V $T - l$ existuje právě jedna cesta mezi x, y.
Přidáním listu do grafu tu cestu nemůžu porušit.

x, l : $\exists$ bijekce mezi x, l cestami v T a x, s cestami v $T - l$.
– V $T - l$ podle IP existuje pouze jedna cesta, pak v T také.

① => ⑥ Indukcí podle n:

$n = 1$ triviální platí.

$n \to n+1$

T souvislé je, protože to je strom. ← protože když $T - l$ je strom, pak T je strom

– pokud smažu s, l, tak l bude izolovaný a T není souvislé.

– pokud rozpojím něco mimo s, l (tedy x, y), tak hranou s, l to nespojím, protože l není uvnitř žádné cesty.

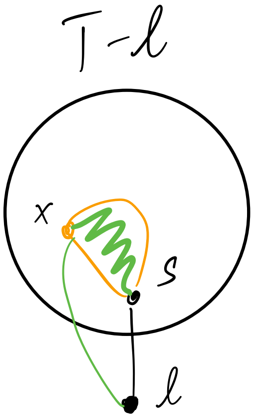
① => ⑤ Indukcí podle n:

$n = 1$ triviálně platí

$n \to n+1$

Přidám hranu. Pokud se l neúčastní, vznikne v $T - l$ kružnice, jelikož je $T - l$ podle IP maximálně acyklický.

Pokud se l účastní, už existovala nějaká cesta z x do s, takže nová vznikla kružnice.



③ => ① $\underline{\neg 1 \Rightarrow \neg 3:}$

T není strom

- nesouvislý
  - x,y: 0 cest
- cyklický
  - x,y: ≥ 2 cesty ✓

④ => ① $\underline{\neg 1 \Rightarrow \neg 4:}$

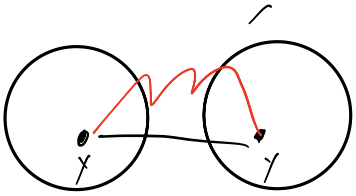
T není strom

- nesouvislý
  - pak není ani minimálně souvislý
- cyklický
  - pokud smažu hranu z kružnice, furt je graf souvislý ✓

⑤ => ① $\underline{\neg 1 = \neg 5:}$

T není strom

- nesouvislý
- cyklický
  - pak nemůže být jakkoliv acyklický



- jestli byl nesouvislý, tak hrana x,y nemohla vytvořit cyklus, jinak by už předtím existovala hrana, tedy by nebylo nesouvislé, resp. nebylo maximálně acyklické.

② => ①

Lemma: Pokud G je souvislý, má n vrcholů a n-1 hran a $|V(G)| \geq 2$, pak G má list.

$$\sum_{v \in V(G)} \underbrace{\deg_G(v)}_{\geq 1} = 2\underbrace{|E(G)|}_{n-1} = 2n-2$$

-> nemůže tam být nula, protože je souvislý

-> Kdyby byly všechny stupně dva, byl by součet pouze 2n. Díky „-2" víme, že tam je i list. $\boxed{↯}$

Indukcí podle n:

n = 1 - Graf na jednom vrcholu je strom

n -> n+1

Buď T graf splňující ② na n+1 vrcholech.

Podle lemma ∃ l list v T. T - l splňuje ② $\overset{IP}{=>}$ T-l je strom.

=> T je pak taky strom

Kostra grafu G je podgraf T taková:

- T je strom
- $V(G) = V(T)$

Graf má kostru <=> G je souvislý

Nechť T je kostra grafu G.

=> $V(G) = V(T)$, přičemž T je souvislý.

Pak i G je souvislý.

<= Máme-li souvislý cyklický G, můžeme tak dlouho odebírat „cyklické hrany", až získáme acyklický souvislý graf.

Rovinné kreslení grafů

Oblouk v rovině je:

$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

prostá & spojitá

Krajní body: f_0, f_1

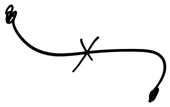
Topologická kružnice:

Stejná jako oblouk, jen $f(0) = f(1)$

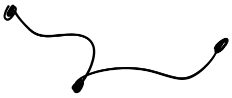
Nakreslení grafu do roviny:

- $b(v) \in \mathbb{R}^2$ je nakreslení vrcholu v do roviny.

  $V \to \mathbb{R}^2$ je prostá
- $\sigma(e)$ je oblouk - nakreslení hrany $e = \{x, y\}$
- pokud $b(v) \in \sigma(e)$, pak $v \in e$



- pokud $x \in \sigma(e) \cap \sigma(f)$, pak $x = b(v)$ pro $v = e \cap f$



Graf je rovinný ≡

má alespoň jedno nakreslení do roviny

Topologický graf ≡ graf + nakreslení

$\sim$ relace na $M \subseteq \mathbb{R}^2$:

$x \sim y \equiv \exists$ oblouk v M

s krajními body x, y

je ekvivalence

↳ ekv. třídy: komponenty obloukové souvislosti

Stěna nakreslení:

Komponenta obloukové souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{e \in E(G)} \sigma(e)$

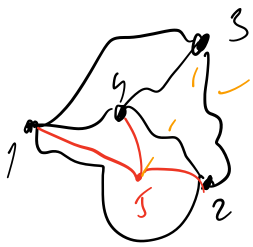
tedy bez těch hran

$\forall n$ P_n je rovinný

$\forall n$ C_n je rovinný

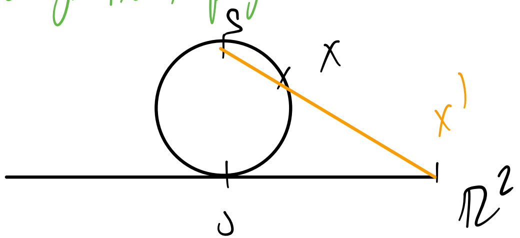
Stromy jsou rovinné

K_5 není rovinný!



nesmím protnout nic, takže nejde

Stereografická projekce:



$f: \sigma \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2$

spojitá bijekce

Kreslení na sféru <=> kreslení do roviny <=> kreslení $[0,1]^2$

Vnější stěnu lze zvolit.

kreslení na válcovou plochu

G je rovinný => $G \% e$ je rovinný

G / e je rovinný

$H \subseteq G$, H není rovinný => G není rovinný

- kdykoliv je v grafu K_5, není graf rovinný

Jordanova věta o kružnici.

Nechť c je topologická kružnice v $\mathbb{R}^2$.

Potom $\mathbb{R}^2 \setminus c$ má právě dvě komponenty obloukové souvislosti (omezenou/neomezenou) jejichž společnou hranicí je c.

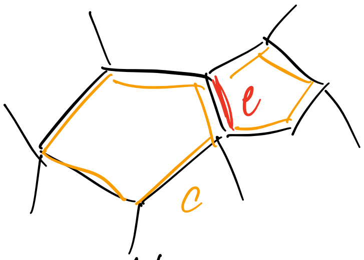
V souvislém topologickém grafu je hranice každé stěny nakreslením uzavřeného sledu.

Důkaz: 1) pro stromy:

„obejdeme strom v nakreslení dokola"

2) Indukcí podle $|E|$ (strom má minimum hran na vrcholech, budu přidávat)

Buď e hrana na kružnici c.



- na obou stranách e musí být jiné stěny (h.o.s)

- když smažu e, spojí se mi stěny a použiju IP, tedy že hranice té nové stěny je uzavřený sled

- pak když tam e vrátím, tak jednoznačně rozdělím ty dvě stěny a můžu takhle označovat sledy.

H není rovinný $\Rightarrow$ $H \% e$ není rovinný

(Kuratowského)

G není rovinný $\Leftrightarrow \exists H \subseteq G$ t.ž. H je isomorfní nějakému dělení K_5 nebo $K_{3,3}$

Eulerova věta:

V souvislém topologickém grafu platí:

$$v + f = e + 2$$

$|V|$ #stěn $|E|$

Počet stěn je funkcí hran a vrcholů, nezáleží na nakreslení.

Důkaz: Podle počtu hran:

1) Graf je strom = ✓

2) (Souvislý a není strom) Nechť G je cyklický,

$h :=$ hrana na kružnici

$G' := G - h$ … stále souvislý

$v' = v$

$e' = e - 1$ → tohle je strom z IP.

$f' = f - 1$

→ podle IP $v' + f' = e' + 2$

$v + f - 1 = e - 1 + 2$

$v + f = e + 2$ ✓

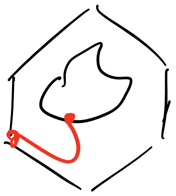
Maximální rovinný graf:

Takový graf G, kdy G je rovinný a $G + h$ není rovinný: $\forall h \in \binom{V}{2} \setminus E$

Každý maximální rovinný graf s počtem vrcholů ≥ 3 je triangulace

↳ všechny stěny jsou trojúhelníky

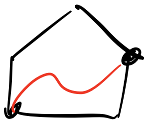
Důkaz: ① Kdyby G nebyl souvislý



- Pokud je rovinný a má více komponent, existují vrcholy na hranicích stěny, mezi kterými můžu vést oblouk. $\boxed{↯}$

- takže bude existovat hranice stěny nakreslení nějakým sledem.

② Nechť S je hranice stěny $\neq \triangle$

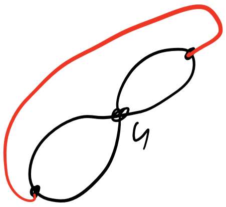


a) S je kružnice délky > 3

- musí tam existovat nespojení vrcholy, tedy graf nebyl maximální $\boxed{↯}$

5) v S se opakuje nějaký vrchol u.

pak existují $m, n \neq u$, které mohu spojit, takže není maximální



Eulerova formule a triangulace:

$$3f = 2e \rightarrow f = \frac{2}{3}e$$

$$v + \frac{2}{3}e = e + 2$$

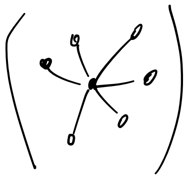
$$e = 3v - 6$$

→ V maximálním rovinném grafu je $e = 3v-6$. s alespoň 3 vrcholi

V rovinném grafu s alespoň 3 vrcholi je $e \leq 3v - 6$

Rovinné grafy bez Δ:

max r.g bez Δ — stěny C_4, C_5



↓

$$4f \leq 2e$$

$$f \leq \frac{1}{2}e$$

↓

$$\underline{\underline{e \leq 2v-4}}$$

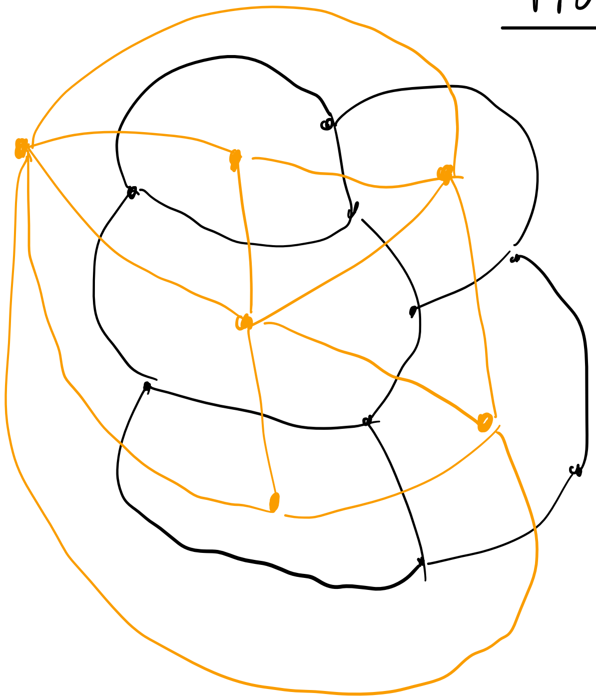
→ Průměrný $\deg(-) < 4$, tedy existuje vrchol stupně ≤ 3.

V každém rovinném grafu je $\text{avg}(\deg(-)) < 6$

$$\frac{\sum_u \deg(u)}{v} = \frac{2e}{v} \leq \frac{6v-12}{v} \boxed{< 6}$$

→ V rovinném grafu existuje vrchol, jehož stupeň je ≤ 5.

Problém 4 barev



Konstrukce duálního grafu

- rovinný topologický multigraf
- $V(G^*) :=$ stěny (G)
- $\{s_1, s_2\} \in E(G^*) \equiv s_1, s_2$ mají v G spol. hranu.

Je-li G souvislý rovinný multigraf, pak $(G^*)^* \cong G$

Obarvení grafu k-barvami (k-obarvení) je:

$c: V(G) \to \{1 \_ k\}$ t.ž. $\forall u,v \in V(G): \{u,v\} \in E(G) \Rightarrow c(u) \neq c(v)$

Barevnost grafu $\chi(G)$ grafu G je:

$\min \{k \mid G$ je k-obarvitelný$\}$

$\exists$ 1-obarvení $\iff E(G) = \emptyset$

$\chi(P_n) = 2$ pro $n \geq 1$

$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{pro sudé} \\ 3 & \text{pro liché} \end{cases}$

Pokud $H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$

$\chi(K_n) = n$

Klikovost $\omega(G)$

$\max \{k \mid \exists H' \subseteq G: H \cong K_k\}$

Barevnost grafu $\geq$ Klikovost grafu

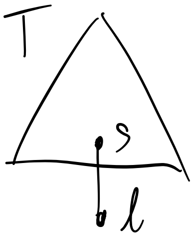
Stromy mají $\chi \leq 2$

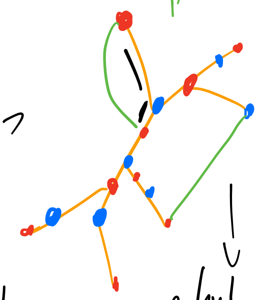
Každý strom je 2-obarvitelný:

Důkaz: indukcí n = 1 --> barva 1.

- obarvím pomocí IP

$T' := T - l$





co když spojuje stejné barvy.

pokud spojuje jiné barvy, je to ok.

Cesta po kostře grafu musí mít sudou délku, aby se mohly střídat barvy --> to ale nenastane, jelikož sudá cesta + naše hrana tvoří kružnici liché délky. $\boxed{\checkmark}$

G je bipartitní <=> $\chi(G) \leq 2$

$\chi(G) \leq 2$ <=> G neobsahuje lichou kružnici

Důkaz: => lichá kružnice má $\chi \geq 3$

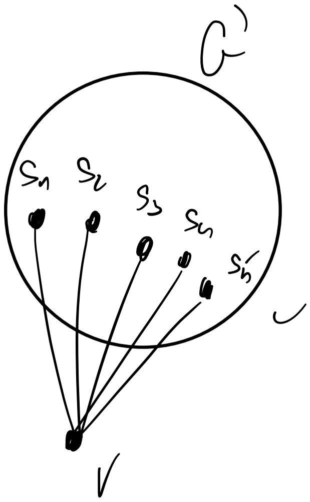
<= nesouvislý barvím po komponentách zvlášť.

-> kostra je strom

- tedy 2-obarvitelná

Nechť T je kostra grafu/komponenty a $c: V(T) \to \{1,2\}$ je obarvením T.

Proto c je obarvením celého G.



--> tyto jsou obarvené, ale je jich jen 5.

Pro G rovinný je $\chi(G) \leq 6$.

Indukcí: podle n

① n = 1 ✓

② n --> n+1   v: $\deg(v) \leq 5$

$G' := G - v$

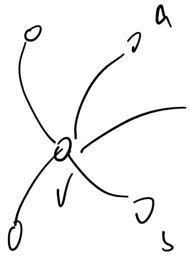
↳ podle IP $\exists c$ obarvení G' 6 barvami

- v má 5 sousedů, takže zbyde barva i pro v.

Pro G rovinný je $\chi(G) \leq 5$

Důkaz:

Stejná indukce jako pro ≤ 6, ale zajistím, že 5 předchozích bude obarvených 4 barvami.



① $\exists a,b$ sousedí v: t.ž. $a \neq b$ a $\{a,b\} \notin E$

↳ Kdyby pro každé dva vrcholy existovala hrana, byly by součástí K_5 a to není rovinné.

② $G' := G - v + \{a,b\}$ – to zachovává rovinnost

③ $G'' := G' / \{a,b\}$ – rovinný

④ Podle IP na G'' $\exists$ 5-obarvení c''

⑤ vyrobím c' obarvení $G' - v$: $c'(u) = \begin{cases} c''(u) & \text{pro } u \neq a,b \\ c''(x) & \text{pro } u = a,b \end{cases}$

↳ vrchol, který se slil z a,b

⑥ v má 5 sousedů, ale obarvené 4 barvami – volná barva

Teorie pravděpodobnosti

Pravděpodobnostní prostor

Obsahuje:

Ω - množina el. jevů

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ množina jevů

$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ pravděpodobnost

Diskrétní p.p.

Obsahuje:

Ω - konečná / spočetná množina

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

$$P(\Omega) = 1$$

Tedy $P(\emptyset) = 0$

$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

když $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

> Konečný / Klasický

Ω je konečná

Ω je konečná a vůči jevům symetrická:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

① Mince $\{0,1\}$

$P(\{0,1\}) = 1$

$P(\emptyset) = 0$

② Kostka $\Omega = \{1,\ldots,6\}$

$P(\{2,4,6\}) = \frac{1}{2}$

$P(\{2,3,5\}) = \frac{1}{2}$

Podmíněná pravděpodobnost:

Pro A, B jevy t.ž. $P(B) \neq 0$

$$P[A|B] := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

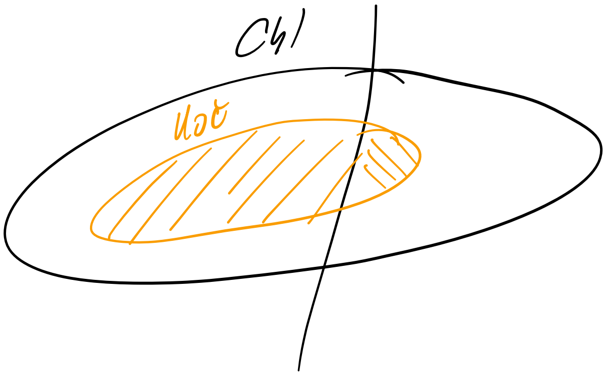
(A za podmínky B)

$$P[A|B] = P[B|A] \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P[\text{Koč} \mid \text{Chl}] = 0{,}5$$

$$P[\text{Koč} \mid \overline{\text{Chl}}] = 0{,}001$$

$$P[\text{Chl}] = 0{,}9$$



$$P[\text{Koč}] = \quad + \quad \begin{aligned} &P[\text{Koč} \cap \text{Chl}] = P[\text{Koč} \mid \text{Chl}] \cdot P[\text{Chl}] \\ &P[\text{Koč} \cap \overline{\text{Chl}}] = P[\text{Koč} \mid \overline{\text{Chl}}] \cdot P[\overline{\text{Chl}}] \end{aligned}$$

Věta o úplné pravděpodobnosti:

Pro A jev:

$B_1 \_ B_n$ rozklad Ω t.ž. $\forall i \; P(B_i) \neq 0$

Platí:

$$P(A) = \sum_i P[A \mid B_i] \cdot P(B_i)$$

Příklad epidemiologický:

$T := [\text{má pozitivní test}]$ $\quad P[T \mid N] = 0{,}95$

$N := [\text{je nemocný}]$ $\quad P[T \mid \bar{N}] = 0{,}03$

$P(N) = 0{,}06$ $\quad 0{,}001$ $\quad P[N \mid T] = ? = P[T \mid N] \cdot \dfrac{P(N)}{P(T)} \doteq 0{,}67$

0,0309

$P(T) = P[T \mid N] \cdot P(N) + P[T \mid \bar{N}] \cdot P(\bar{N}) = 0{,}0852$

0,0307

Bayesova věta:

Pro $A \subseteq \Omega$, $B_1 \_ B_n$ rozklad Ω t.ž. $\forall_i\ P(B_i) \neq 0$

$$P[B_i | A] = \frac{P[A|B_i] \cdot P(B_i)}{\underbrace{\sum_j P[A|B_j] \cdot P(B_j)}_{P(A)}}$$

Nezávislost jevů:

Jevy A, B jsou nezávislé $\equiv P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Longleftrightarrow P[A|B] = P(A)$

$\Omega = \{1 \_ 6\}$ s klasickou P

$A := [\text{sudé číslo}] = \frac{1}{2}$

$B := [\text{číslo} > 2] = \frac{2}{3}$

$C := [\text{prvočíslo}] = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Jevy $A_1 \_ A_n$ jsou:

① Po 2 nezávislé $\equiv \forall_{i,j} : i \neq j : P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$

② nezávislé $\equiv \forall I \subseteq [n], I \neq \emptyset : P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Příklad $\{0,1\}^4$ s kl. P

$A := [11{*}{*}]$ $\quad P(A) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$B := [{*}{*}11]$ $\quad P(B) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A \cap C) = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$C := [\text{sudý } \#1]$ $\quad P(C) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{32}$

Příklad permutací: Ω permutace na $[32]$

$A := [\pi(1) = 1]$ $\quad P(A) = \frac{1}{32}$, $\quad P(B) = \frac{1}{32}$, $\quad P(A \cap B) = \frac{30!}{32!} \neq \frac{1}{32^2}$

$B := [\pi(2) = 2]$ $\quad P[B|A] = \frac{1}{31}$

Náhodní veličina je:

funkce z $\Omega \to \mathbb{R}$

$$P[\underbrace{\#\text{pevných bodů} = 0}_{\text{jev}}]$$

Střední hodnota náhodné veličiny X je:

$$E[X] := \sum_{w \in \Omega} X(w) \cdot P(\{w\})$$ → v klasickém p.p. je to obyč průměr

$$E[\#\text{ok na kostce}] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

Věta o linearitě střední hodnoty:

$\forall A, B$ náhodné veličiny, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$E[A+B] = E[A] + E[B]$$
$$E[\alpha A] = \alpha E[A]$$

$\{1\_6\}^n$, $E[S]$

↳ #sudých hodů

$S_1 \_ S_n$: $\boxed{S_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}}$ na i-té pozici je sudé číslo → indikátor

$S = \sum_i S_i$ $\quad = P(\text{i-tá sudé}) = \frac{1}{2}$

$E[S_i] = \frac{1}{2}$

↳ $i = \frac{n}{2}$