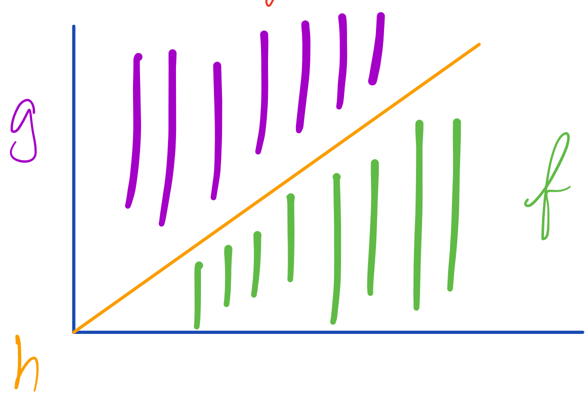
Dokažte nebo vyvraťte:

1) $f = O(h)$ a $g = \Omega(h) \Rightarrow f = O(g)$



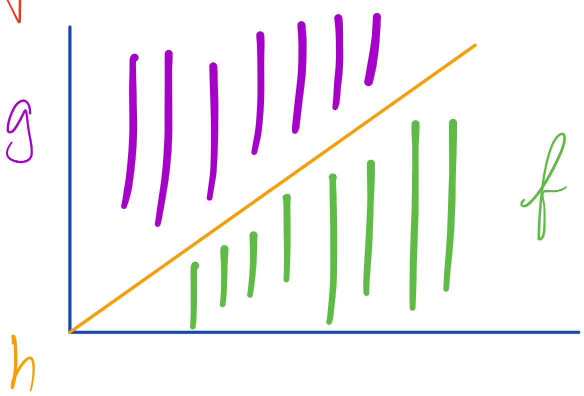
Podle náčrtu je vidět, že f nemůže být rozhodně větší než h, a tím pádem ani jeho g.

$0 < f \le c\cdot h$ $\qquad$ $0 < c\cdot h \le g$

$$0 < f \le c\cdot h \le g \Rightarrow 0 < f \le g \quad \checkmark$$

chceme: $0 < f \le c\cdot g$ ✓

2) $f \in O(h)$ a $g \in \Omega(h) \Rightarrow f+g \in \Omega(h)$



Podle náčrtu je vidět, že každý součet v asymptotické složitosti bude větší než jeho dva prvky.
Tedy každý součet g + „cokoliv" $\ge g$, tím pádem spodní odhad nebude porušen.

chceme: $0 < c\cdot h \le f+g$

$\boxed{0 < f} \le c\cdot h$ $\qquad$ $0 < \boxed{c\cdot h \le g}$

$\underline{g+f > g}$

pokud $g \ge c\cdot h \Rightarrow g+f \ge c\cdot h$

3) $f \in O(h)$ a $g \in \Omega(h)$, $\Rightarrow f \cdot g - \Omega(h)$

chceme $0 < c \cdot h \le f \cdot g$

$0 < f \le c \cdot h$ $\quad$ $0 < c \cdot h \le g$

$c \cdot h \le c \cdot h \cdot f \le g \cdot f$ $\quad$ Platí

- vše díky tomu, že $c > 0$, $n > n_0$

4) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$

chceme $0 < 2^f \le c \cdot 2^g$

$0 < f \le c \cdot g$

uvažme rovnost $f = c \cdot g \Rightarrow 0 < 2^{c \cdot g} \not\le c \cdot 2^g$

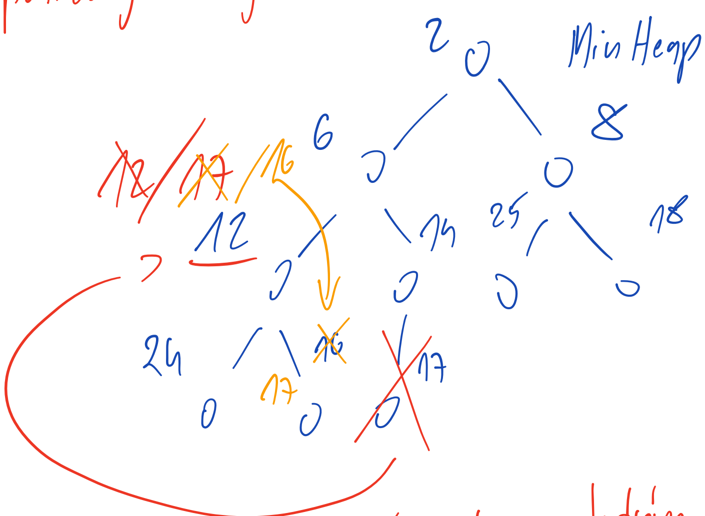
alternativně

$2^f \le 2^{c \cdot g}$

Neplatí

5) Zadaný prvek lze odstranit z haldy v čase $O(\log n)$

Halda má $\log n$ vrstev. Odstranění by tedy symbolizovalo (několikanásobný) průchod haldou k prvku. To odpovídá: potřebuji $\log n$ kroků k nalezení adepta na smazání



Pak nahradím odstraněný prvek posledním přidaným prvkem do haldy a probublávám, dokud není prvek na své pozici

$$f \in O(g) \implies \frac{1}{f} \in O\left(\frac{1}{g}\right)$$

$c \cdot g \geq f > 0$ $\qquad$ $\frac{c}{g} \geq \frac{1}{f} > 0$

$\frac{c}{f} \geq \frac{1}{g} > 0$ $\qquad$ $cg \geq f > 0$ $\qquad$ $g \geq \frac{f}{c} > 0$

$\frac{c}{g} \geq \frac{1}{f} > 0$ $\qquad$ $cf \geq g > 0$ $\qquad$ $f \geq \frac{g}{c} > 0$

Nechť $c = 2$

$g \geq \frac{f}{2}$

$f \geq \frac{g}{2}$ $\boxed{ϟ}$

$\boxed{\text{Neplatí}}$

$$f \in O(g) \implies \frac{1}{g} \in O\left(\frac{1}{f}\right)$$

$c \cdot g \geq f > 0 \ /:gf$ $\qquad$ $\frac{c}{f} \geq \frac{1}{g} > 0$

$\frac{c}{f} \geq \frac{1}{g} > 0$ $\quad //$

$\boxed{\text{Platí}}$

$$f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(g) \implies f_1 + f_2 \in O(g)$$

$c \cdot g \geq f_1 > 0$

$c \cdot g \geq f_2 > 0$

$c \cdot g \geq f_1 + f_2 > 0$

Jelikož není „c" fixně určeno, je výraz $f_1 + f_2$ vlastně $\leq 2c \cdot g$, kdy „c" může nabýt dostatečné hodnoty pro to, aby tvrzení platilo