Matematická analýza 1 (NMAI054)
12. přednáška

Tereza Klimošová

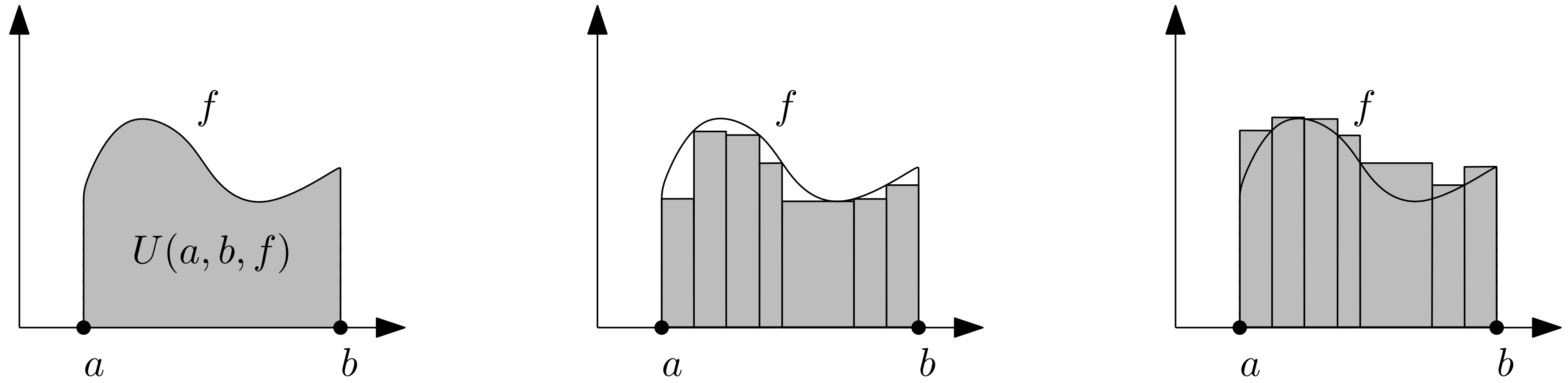
tereza@kam.mff.cuni.cz

5.května 2022

Riemannův integrál - připomenutí

$$s(f,D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \inf_{I_i} f, \quad S(f,D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \sup_{I_i} f$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_D s(f,D), \quad \overline{\int_a^b} f = \inf_D S(f,D),$$



Odhadněte hodnotu $\int_4^5 \sqrt{\ln x}\, dx$: Kvíz www.menti.com 8631 1508

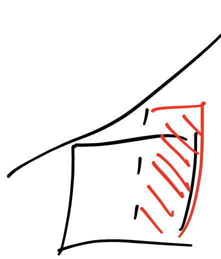
Riemannův integrál

Věta

Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce, D' a D jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí

$$s(f,D) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(f,D').$$

společné zjemnění dělení D a D' = sjednocení množin dělicích bodů D a D'

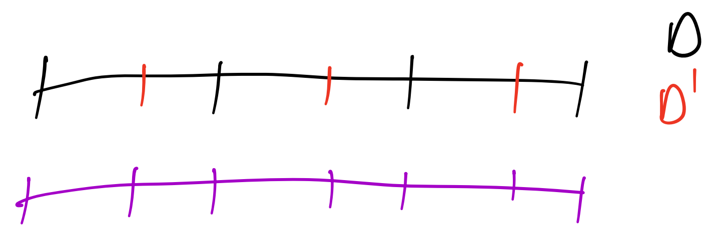


?

$s(f,D) \le s(f,D'')$

ta přesnost je vyšší, takže + jemnější půjde přesněji nahoru.

$\le S(f,D'') \le S(f,D')$



Riemannův integrál - příklad

$$\int_0^1 x\,dx = 1/2.$$

$$D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots 1\right)$$

$$s(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(0+1+\dots+(n-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

$$S(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\left(1+2+\dots n\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n)$$

Kritérium integrovatelnosti

Věta (Kritérium integrovatelnosti)

Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Potom*

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists D : 0 \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Jinými slovy, f *má Riemannův integrál, právě když pro každé* $\varepsilon > 0$ *je pro nějaké dělení* D *intervalu* $[a, b]$ *odpovídající horní suma o méně než* ε *větší než odpovídající dolní suma.*

Kvíz www.menti.com 2971 9500

Důkaz: $\underline{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists D : s(f, D) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}$ D'' společné zjemnění D' a D

$\exists D' : S(f, D') < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\underbrace{S(f, D'')}_{< (\int) + \frac{\varepsilon}{2}} - \underbrace{s(f, D'')}_{> (\int) - \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ nepřímo

$$f \notin \mathcal{R}[a,b] :\Leftrightarrow \overline{\int_a^b} - \underline{\int_a^b} > \varepsilon > 0 \Rightarrow S(f,D) - s(f,D) > \varepsilon \quad \forall D$$

$\boxtimes$

Monotonie a integrovatelnost

Věta (Monotonie $\Rightarrow$ integrovatelnost)

Je-li funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ nerostoucí nebo neklesající, potom má Riemannův integrál.

Důkaz

Neklesající f: $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$

$$\sup_{[\alpha,\beta]} f = f(\beta) \qquad \inf_{[\alpha,\beta]} f = f(\alpha)$$

Vezmeme ε, $D = (a_0, \dots, a_n)$ $\quad |I_i| < \varepsilon$ $\quad \forall i = 0, \dots, n-1$, $\quad |I_i| = a_{i+1} - a_i$

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \big(f(a_{i+1}) - f(a_i)\big) \le \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon \cdot \big(f(a_{i+1}) - f(a_i)\big) =$$

$$= \varepsilon \cdot \big(f(a_n) - f(a_0)\big)$$

Spojitost a integrovatelnost

Věta (Spojitost $\Rightarrow$ integrovatelnost)

Je-li funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *na intervalu* $[a, b]$ *spojitá, potom má Riemannův integrál.*

1. základní věta analýzy

Newtonův integrál - připomenutí

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Věta (1. základní věta analýzy)

Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a funkce $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nechť je definována předpisem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Potom

(i) *F je na $[a,b]$ spojitá a*

(ii) *v každém bodě spojitosti $x_0 \in [a,b]$ funkce f existuje vlastní $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ (platí to jednostranně, pokud $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$).*

- analogické tvrzení platí pro $F(x) = -\int_x^b f(t)\,dt$

Primitivní funkce spojité funkce

Věta (10. přednáška: Spojitá funkce má primitivní funkci)

Je-li I neprázdný otevřený interval a funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je na I spojitá, pak má f na I primitivní funkci.

▸ Důkaz

Zvolme $c \in I$ $\quad F(x) = \begin{cases} \int_c^x f(t)\,dt & x \geq c \\ -\int_x^c f(t)\,dt & x < c \end{cases}$

prim. k f ze základní věty analýzy

Důkaz 1. věty analýzy:

Spojitost: f je R. int., $\Rightarrow$ f omez.: $\exists c : |f(x)| \leq c \quad \forall x \in [a,b]$

$x, x_0 \in [a,b] : \left|F(x) - F(x_0)\right| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \leq |x_0 - x| \cdot c$

t.j. pokud $x \to x_0$, tak $|F(x) - F(x_0)| \to 0$,

tedy $F(x) \to F(x_0)$ $\Leftarrow$ spoj. F v x_0.

Důkaz 1. ZVA

▸ Důkaz

Druhá část:

x_0 pro daní ε vezmeme δ: $|x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

Pro $0 < x - x_0 < \delta$ platí: $f(x_0) - \varepsilon \le \dfrac{\int_{x_0}^{x} f}{x - x_0} \le f(x_0) + \varepsilon$

$$\int_{x_0}^{x} f = F(x) - F(x_0)$$

$\Leftarrow F'(x_0) = f(x_0)$

$\Longleftarrow$ potřebuji tak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

2. základní věta analýzy

Věta (2. základní věta analýzy)

Pokud $f \in \mathcal{R}[a,b] \cap \mathcal{N}(a,b)$, *pak*

$$\int_a^b f = (N)\int_a^b f\ .$$

▸ Důkaz

F prim. k f na (a,b), spoj. dodef. v a,b: $F(a) := F(a^+)$, $F(b) := F(b^-)$

$(N)\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Důkaz 2. ZVA

Vezměme libovolné dělení $D = (a_0, \dots a_n)$ intervalu $[a,b]$, na každý I_i použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě na F:

$$\exists b_i \in (a_i, a_{i+1}) : f(b_i) = F'(b_i) = \frac{F(a_{i+1}) - F(a_i)}{a_{i+1} - a_i}$$

$$\inf_{(a_i, a_{i+1})} f \leq \underline{\underline{f(b_i)}} \leq \sup_{(a_i, a_{i+1})} f$$

$$\underline{S(f,D)} \geq \underbrace{F(b) - F(a)}_{\displaystyle \overset{\|}{\int_a^b f}} = \sum \left(F(a_{i+1}) - F(a_i)\right) = \sum f(b_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) \leq \underline{s(f,D)}$$

Riemannův a Newtonův integrál

$C[a,b]$ = množina spojitých funkcí na $[a,b]$

Věta (Porovnání Newtonova a Riemannova $\int$)

Máme

$$C[a,b] \subseteq \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{R}[a,b] \, .$$

Pokud $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{R}[a,b]$, *pak*

$$(N)\int_a^b f = \int_a^b f \, .$$

Množina $\mathcal{N}(a,b) \setminus \mathcal{R}[a,b]$ *i* $\mathcal{R}[a,b] \setminus \mathcal{N}(a,b)$ *je neprázdná: existují funkce, které mají Newtonův integrál, ale ne Riemannův, i naopak.*

Důkaz

neomezená, nedefinovaná v jednom krajním bodě

$x^{-\frac{1}{2}}$ na $(0,1)$

není $\mathcal{R}$, je (N)

monotónní, bez primitivní funkce.

např. $\operatorname{sgn}(x)$