Matematická analýza 1 (NMAI054)
9. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

14.dubna 2022

Konvexita a konkávnost

Definice

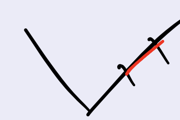
Nechť I je interval. Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je na intervalu I

- *konvexní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí

$$f(x) \leq f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

rovnice sečny

- *ryze konvexní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá,



tady jsou si rovny

- *konkávní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí

$$f(x) \geq f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

- *ryze konkávní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá.

$f(x) = |x|$ www.menti.com 4542 3959 Kvíz

je konvexní

Konvexita, konkavita a druhá derivace Pro netriviální funkce

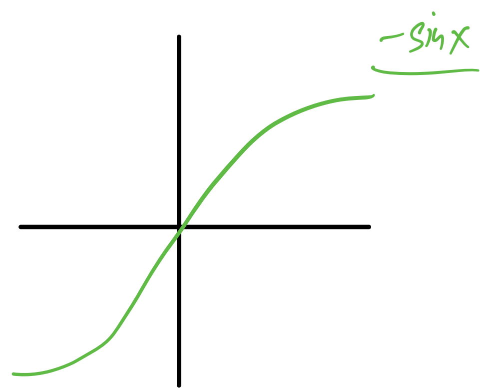
– funkce ale musí svou druhou derivaci

Věta

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, nechť funkce $f : I \to \mathbb{R}$ má na I druhou derivaci $f''(x)$. Pokud je f'' na I kladná (resp. nezáporná), je f na I ryze konvexní (resp. konvexní). Pokud je f'' na I záporná (resp. nekladná), je f na I ryze konkávní (resp. konkávní).

Funkce může být konvexní (nebo konkávní), i když druhou derivaci v některých bodech nemá!

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$$



Spojitost derivace v krajním bodě

Věta

Nechť $I = [a, b)$ je interval, nechť funkce $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá zprava v bodě a a nechť má na (a, b) vlastní derivaci, pro níž platí $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom má f v bodě a derivaci zprava, pro níž platí

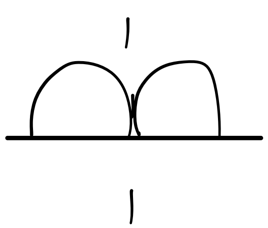
$$f'_+(a) = A.$$

f musí být spojitá zprava v a!

$$+\infty = \mathrm{sgn}'_+(0) \neq \lim_{x\to 0^+} \mathrm{sgn}'(x) = 0 \quad \times$$

v bodě a není spojitá zprava (popř. zleva)

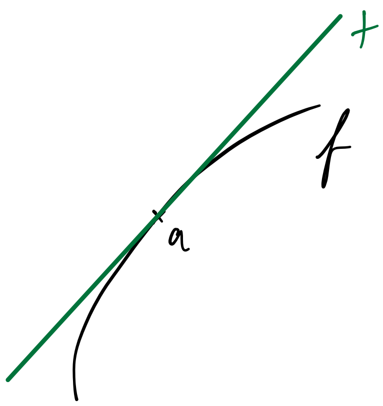
$$|\sin x|'_+(0)$$



derivace zprava je rovna 1

$$= \lim_{x\to 0^+} \sin' x = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

Aproximace funkce



$T(a) = f(a)$

$\lim_{x \to a} f(x) - T(x) = 0$ → naivní myšlenka

- každá přímka procházející tím bodem by fungovala
- potřebujeme tedy lepší/více podmínek

$f(x) - T(x) \le |x-a|$ → lepší, ale nevíme, jestli toho umíme dosáhnout

$f(x) - T(x) = o(|x-a|)$

→ rozdíl klesá rychleji než vzdálenost od bodu $x-a$

Aproximace funkce

Derivace = nejlepší aproximace lineární funkcí

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

- rovice tečny grafu f v a

$f(x) - t(x) = o(|x-a|)$

- jediný polynom stupně ≤ 1 splňující

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0$$

Aproximace pomocí polynomů vyššího stupně

Pro funkci f s vlastní n-tou derivací v a existuje právě jeden polynom $P(x)$ stupně $\leq n$, pro který

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Taylorův polynom

Definice (Taylorův polynom)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a nechť f je funkce definovaná na okolí a, která má v a vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pokud $n = 0$, předpokládejme i spojitost f v a. *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a* rozumíme polynom

$(x-a)^0 = 1$; pro $x = a$

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

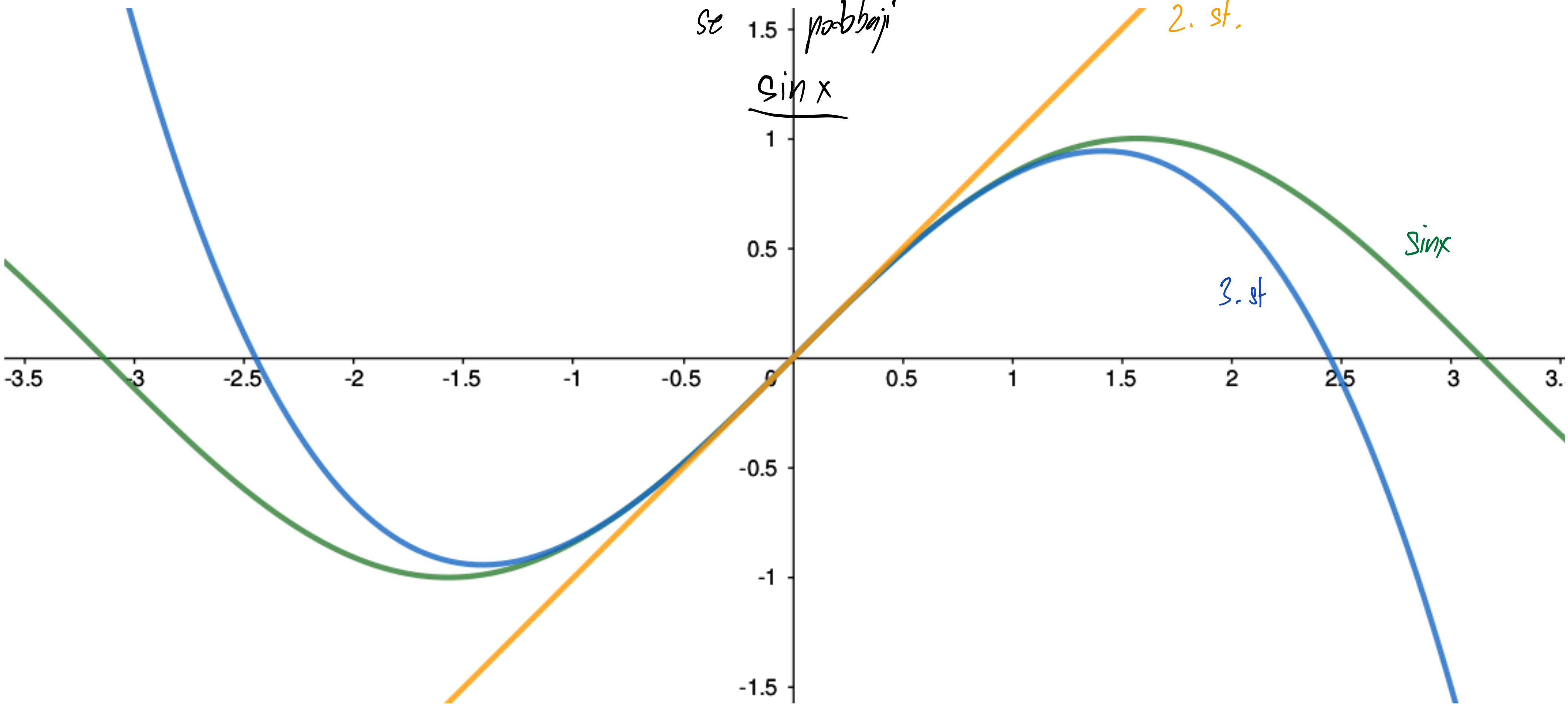
$f^{(0)} = f$ tzn. že nultá derivace je funkce samotná

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

- 0^0 je obecně nedefinovaný výraz
- v kontextu polynomů či mocninných řad: $(x-a)^0$ interpretujeme jako konstantní funkci rovnou 1 pro všechna x
- $f^{(0)} := f$, t.j., f je svou vlastní „nultou derivací“

Aproximace funkce $\sin x$ na okolí nuly polynomem prvního a třetího stupně

Důležité je, že na okolí nuly se podobají



Taylorův polynom

Označme

$$T(x) = T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Platí

- $T(a) = f(a)$ (všechny $(x-a)$ budou rovny nule)
- $T'(a) = f'(a)$
- obecně $T^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ $(k \leq n)$

Pro $n \geq 1$ platí

$$(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$$

Taylorův polynom funkce f n-tého stupně v bodě a.

(pro $n = 1$ je nutno předpokládat spojitost f' v a).

Charakterizace Taylorova polynomu

Věta (Charakterizace Taylorova polynomu)

Nechť funkce f má Taylorův polynom řádu $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom $T(x) = T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n s vlastností

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Ekvivalentně $f(x) = T(x) + o(|x-a|^n)$ pro $x \to a$. → tohle je ta limita výše

Co platí pro Taylorův polynom funkce $g(x) = f(2x)$?

www.menti.com 28 07 71 6 Kvíz

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - T(2x)}{(2x-a)^n} = 0 \quad \xrightarrow{\text{podle VOLSF}} \quad = \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-T(2x)}{2^n \left(x - \frac{a}{2}\right)^n} \overset{AL}{=} \frac{1}{2^n} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - T(2x)}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^n}$$

Tohle je ukázka, proč g má v bodě $a/2$ T stupně n rovný $T(2x)$

Charakterizace Taylorova polynomu

Věta (Charakterizace Taylorova polynomu)

Nechť funkce f má Taylorův polynom řádu $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom $T(x) = T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n s vlastností

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Ekvivalentně $f(x) = T(x) + o(|x-a|^n)$ pro $x \to a$.

Lemma

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a Q je polynom stupně nejvýše n takový, že

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Pak je Q identicky nulový polynom.

Důkaz

Důkaz lemmatu

Indukcí podle n:

$n = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{\text{konst.}}{1} = 0 \Rightarrow \text{konst} = 0$$

$n \geq 1$:

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{\boxed{(x-n)^a}} = 0$$

tohle jde k nule $\Rightarrow$ pak $\lim_{x \to a} Q(x) = 0$ → protože je spojité

$= Q(a) = 0 \Rightarrow$ polynom v bodě a má kořen

$\Rightarrow Q(x) = (x-a) \cdot R(x)$, kde $R(x)$ je polynom stupně nejvýše $n-1$.

$$\lim_{x \to a} \frac{(x-a) \cdot R(x)}{(x-a) \cdot (x-a)^{n-1}} = 0 \quad \text{z IP pro } n-1 \Leftrightarrow R(x) = 0$$

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}}$$

je polynom s nižším stupněm, tedy splňuje IP.

Důkaz věty

Nechť funkce f má Taylorův polynom řádu $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom $T(x) = T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n s vlastností

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T(x)}{(x-a)^n} = 0. \quad *$$

Části důkazu:
1) splňuje *
2) * je jediný rovnice

Důkaz

(1) $T(x)$ splňuje * indukcí:

$n=0$: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = \dfrac{f(x)-f(a)}{1} = 0$ ✓ ze spojitosti f v bodě a

$n=1$: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)\cdot(x-a)}{(x-a)} \overset{AL}{=} \Big(\underbrace{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{=f'(a)}\Big) - f'(a)\Big(\overbrace{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x-a}}^{=1}\Big) =$

$= f'(a) - f'(a) = 0$

Důkaz věty

$n > 1$: S využitím L'H:

L'H jde použít, protože $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n\cdot(x-a)^{n-1}} \overset{AL}{=} \frac{1}{n}\cdot \lim_{x\to a}\frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

dle IP pro f' a $n-1$

② Jedinečnost $*$ sporem:

se stupněm nejvýše n

Nechť existují dva polynomy T a $\check{T}$ splňující rovnost $*$. $T \neq \check{T}$

na jedné straně jsem přičetl, na druhé jsem odečetl.

$$\lim_{x\to a}\frac{T(x) - \check{T}(x)}{(x-a)^n} \overset{AL}{=} \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^n}}_{=0 \text{ podle } *} + \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x) - \check{T}(x)}{(x-a)^n}}_{=0 \text{ podle } *}$$

Podle lemmatu jsou to identické nuly, tudíž jsou to stejné polynomy $\lightning$!

Taylorův polynom

Je polynom $T(x)$ stupně $\leq n$ splňující

Tohle určuje chybu/zbytek polynomu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{(x-a)^n} = 0$$

nutně Taylorův polynom? Ne.

funkce f nemusí mít T příslušného stupně, protože nemusí mít příslušné derivace.

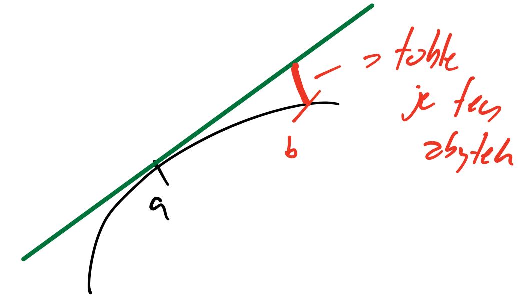
$$f \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

je to Tp 2. stupně?

$T(x) = 0$ T.p. v 0: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ALE

$T(x) = 0$ není T.p. f, jelikož druhá derivace není def.

Zbytek Taylorova polynomu



$$R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$$

Charakterizace Taylorova polynomu: $R_n^{f,a}(x) = o(|x-a|^n)$ pro $x \to a$.

Theorem (Lagrangeův odhad zbytku)

Nechť f je funkce, která má na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ vlastní derivaci řádu $n+1$ (a tím pádem i spojité vlastní derivace všech nižších řádů). Volme $a, b \in I$, kde $a \neq b$. Potom existuje bod c ostře mezi a a b takový, že platí

$$R_n^{f,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Speciálně pro $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ ležící ostře mezi body a a b platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, máme odhad

$$|R_n^{f,a}(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}.$$

$\Rightarrow \quad R_n^{f,a}(x) = O(|x-a|^{n+1})$ pro $x \to a$

Taylora řada

Pokud má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů a pokud pro nějaké x platí $\lim_{n\to\infty} R_n^{f,a}(x) = 0$

$\Rightarrow$ posloupnost $\underline{(T_n^{f,a}(x))_{n=0}^{\infty}}$ konverguje k $f(x)$.

Ekvivalentně: $f(x) = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$

Definice (Taylorova řada) - Taylorův polynom nekonečného stupně

Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů, rozumíme pro $x \in \mathbb{R}$ její *Taylorovou řadou se středem v a* řadu

$$T^{f,a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Maclaurinova řada = Taylorova řada se středem v 0

Taylorův polynom

$$T^{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Přiřaďte funkci její Taylorovu řadu se středem v nule:

a. $(1+x)^m$ A. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$

b. e^x B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

c. $\ln(x+1)$ C. $\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n$

příklad

posl. $\frac{x^n}{n}$, tedy nekonverguje pro $x=0$

www.menti.com 5184 3333 ▸ Kvíz

Rovná se vždy součet Taylorovy řady v x funkční hodnotě $f(x)$? Ne.

Výpočet limity pomocí Taylorova polynomu

Buď budu opakovaně aplikovat L'H, nebo: T.p

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(|x|^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(|x|^2)$$

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + o(|x|)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{(\cos(x) - 1)(\exp(x) - 1)}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(|x|^3)}{\left(-\frac{x^2}{2!} + o(|x|^2)\right)\cdot\left(x + o(|x|)\right)} = \frac{-\frac{\cancel{x^3}}{3!}\cdot\left(1 + \frac{o(|x|^3)}{x^3}\right)}{\frac{\cancel{x^3}}{2!}\cdot\left(1 + \frac{o(|x|^2)}{x^2}\right) \cdots}$$

jde k nule

jde k nule

$$\overset{AL}{=} \frac{1}{3}$$