$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - h}$$

Matematická analýza 1 (NMAI054)
8. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

7.dubna 2022

Derivace inverzní funkce

Věta (Derivace inverzní funkce)

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak

(i) *Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce $f^{<-1>}$ má v b derivaci*
$$\left(f^{<-1>}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(ii) *Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $\left(f^{<-1>}\right)'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

▸ Důkaz

f rostoucí : $\quad G(x) = \dfrac{x-a}{f(x)-f(a)} \quad J \setminus \{a\}$

$y \neq b \quad G\left(f^{<-1>}(y)\right) = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$

Důkaz

→ díky monotonii platí druhá podmínka

VOLSF

$$f^{-1}(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} G\left(f^{-1}(y)\right) = \lim_{x \to a} G(x)$$

$f'(a) \neq 0$

$$\frac{1}{f'(a)}$$

$f'(a) = 0$

automaticky nemohu použít

$$+\infty$$

$$\frac{1}{\text{něco nekonečně se blížící nule}}$$

takže to jde k nekonečnu.

l'Hospitalovo [lopitalovo] pravidlo *Aplikace derivace!*

nástroj pro výpočet limit neurčitých výrazů $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$

Věta (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, *nechť funkce* $f, g\colon P(a,\delta) \to \mathbb{R}$ *mají na* $P(a,\delta)$ *vlastní derivaci a nechť* $g'(x) \neq 0$ *na* $P(a,\delta)$.

1. *Pokud* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *a* $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, *pak i* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.
2. *Pokud* $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ *a* $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, *pak i* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^-$ *a* $x \to a^+$.

Správné použití

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Chybné použití

nesplněny podmínky L'H

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{3x+1} \neq \lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)'}{(3x+1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

není to $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$

Chybné použití

$\frac{\infty}{\infty}$ ✓

musí existovat limita podílu těch dvou derivací

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(x+\sin x)'}\cancel{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+\cos x}$$

což tedy neexistuje

tedy limita neexistuje.

$$= +\infty \qquad \frac{x^2}{x+1} \leq \frac{x^2}{x+\sin x}$$

$$\frac{x^2}{x+1} \to +\infty$$

Beznadějné použití

– Není tady žádný špatný krok, jen se tu L'H prostě nehodí.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\exp(-1/x))'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)/x^2}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x^2} = \dots$$

$y = \frac{1}{x}$ $\quad f(y) = \frac{y}{\exp(y)} \overset{\text{VOLSF}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{\exp(y)} = 0$

Nutná podmínka pro lokální extrém

Věta (Nutná podmínka pro lokální extrém)

Nechť má $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ v bodě a nenulovou derivaci $f'(a) \neq 0$. Potom f nenabývá v a lokální extrém. (T.j. pro každé δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, existují body $b, c \in P(a, \delta_1)$ takové, že $f(b) < f(a) < f(c)$.)

$\Rightarrow$ pokud funkce f **má** lokální extrém v bodě a

- $f'(a) = 0$, nebo
- $f'(a)$ neexistuje

Opačná implikace ale neplatí – nulová, nebo neexistující derivace lokální extrém neimplikuje!

Globální extrém musí být lokálním extrémem, ale pozor na krajní body!

$f'(a) > 0$, tedy na $P(a, \delta_2)$ pro $\delta_2 > 0$ platí: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow$

Důkaz

$x \in P^-(a, \delta_2)$ $x - a < 0 \Rightarrow f(x) < f(a)$

paku a není l. min

$x \in P^+(a, \delta_2)$ $x - a > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$

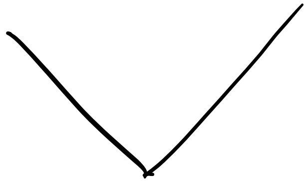
paku a není l. max

$\boxed{X}$

Důkaz

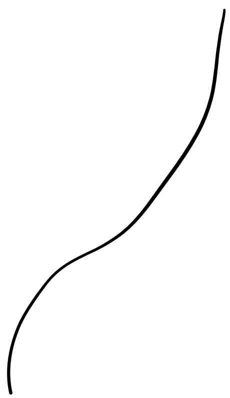
Příklady

$f(x) = |x|$



min v 0, není derivace v 0

$f(x) = x^3$



$(x^3)' = 3x^2$ → má nulovou derivaci

→ v nule není žádný extrém

$f(x) = x^2$ na $[-1, 1]$

→ díky uzavřenému intervalu existují lokální extrém. Jinak x^2 roste donekonečna

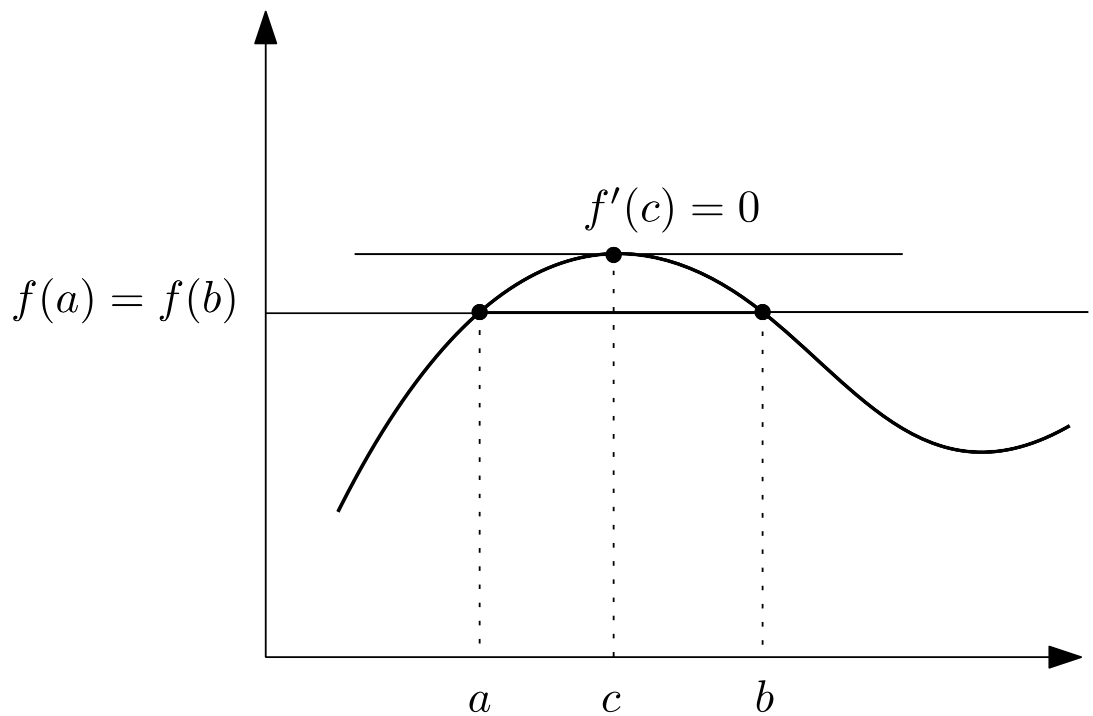
minimum v 0 $\quad f'(0) = 0$

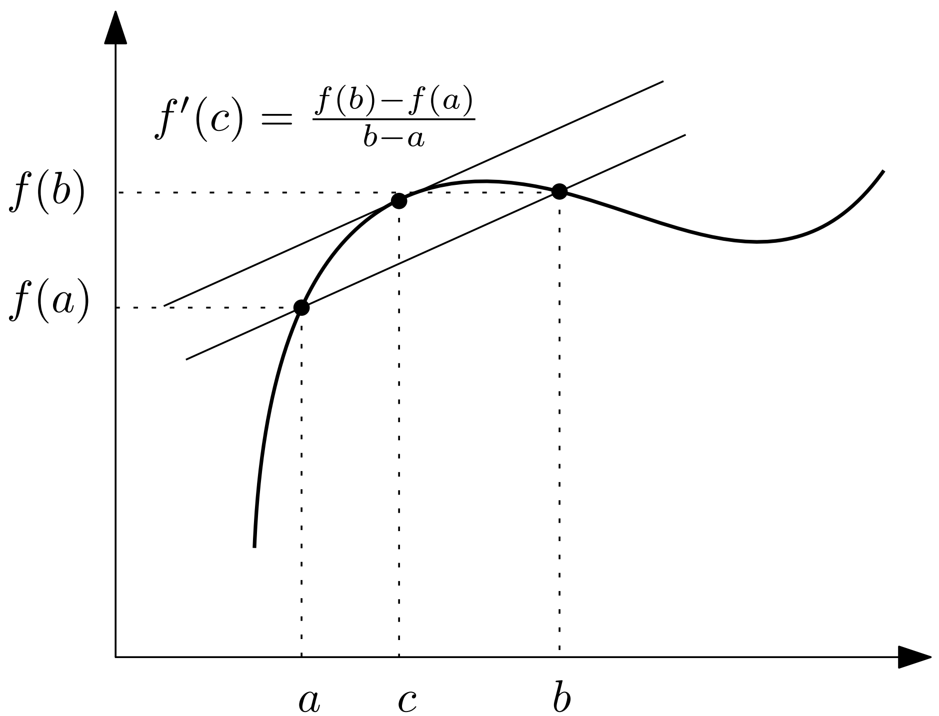
maxima v $-1, 1$

minimum v 0

Věty o střední hodnotě

"Existuje bod c, kde je tečna grafu rovnoběžná se zadanou sečnou."



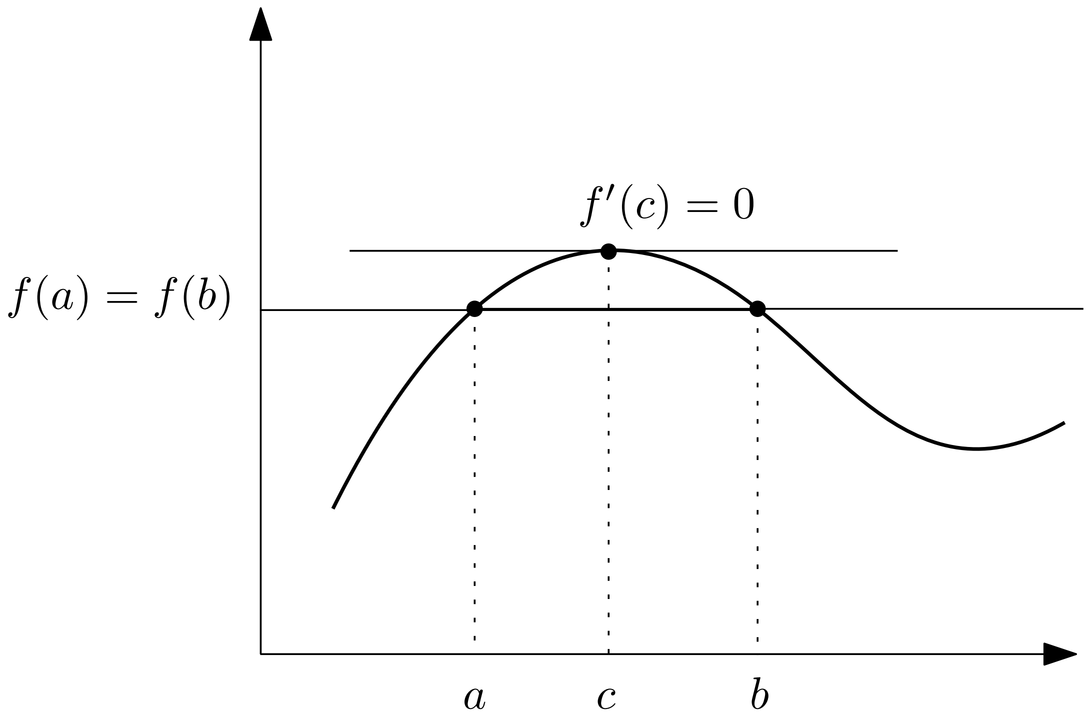


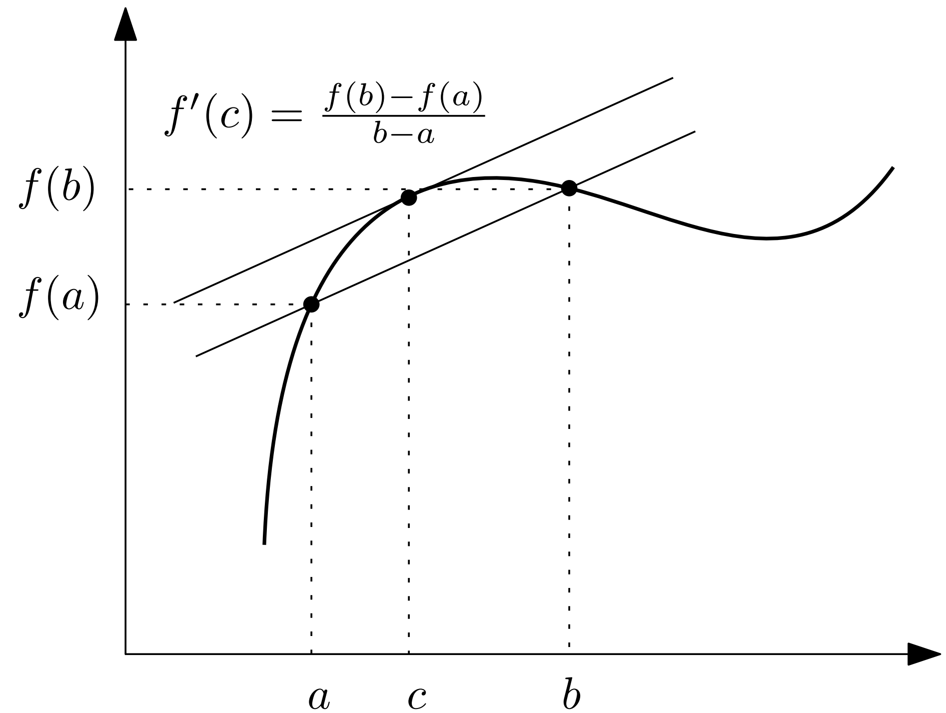
Věta (Rolleova věta)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ spojitá, má na intervalu (a, b) derivaci (i nevlastní) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Věty o střední hodnotě

"Existuje bod c, kde je tečna grafu rovnoběžná se zadanou sečnou."





Věta (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ *a funkce* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je na* $[a, b]$ *spojitá a má na intervalu* (a, b) *derivaci (i nevlastní). Potom existuje* $c \in (a, b)$ *tak, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz Rolleovy věty

Věta (Rolleova věta)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je na $[a,b]$ spojitá, má na intervalu (a,b) derivaci (i nevlastní) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a,b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz

f konstantní → pak má nulovou derivaci ve všech vlastních bodech

f ! konstantní: $\exists d: f(d) > f(a)$

Princip maxima

- máme uzavřený omezený interval.

f nabývá max. $[a,b]$

v bodě c, kdy $c \neq a \neq b$, protože

$f(c) \geq f(d) > f(a)$

- tedy je uvnitř intervalu
- a tam všude existuje derivace

→ Pak z podmínek pro lok. max:

✗ – derivace neexistuje

✓ – $f'(c) = 0$

Důkaz Lagrangeovy věty

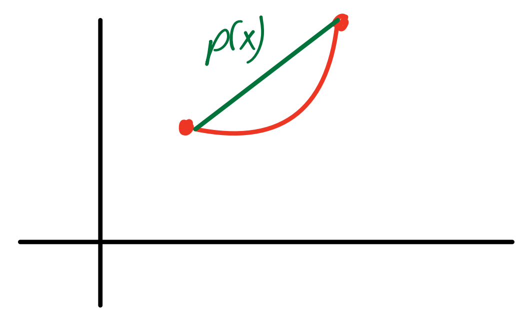
Věta (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ spojitá a má na intervalu (a, b) derivaci (i nevlastní). Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

▸ Důkaz

$$p(x) = f(a) + (x-a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$ → rovnice sečny



$$h(x) = f(x) - p(x)$$

– zase bude spojitá

– zase má derivaci v celém intervalu

$$h'(x) = f'(x) + p'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$h(a) = 0 = h(b)$

$\Rightarrow$ Použijeme Rolleovu větu na $h \to c$ $\quad h'(c) = 0$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Derivace a monotonie

Věta

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (s kladnou délkou), funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je na J spojitá a má v každém vnitřním bodě intervalu J derivaci. Pokud na vnitřku J platí $f' > 0$ (resp. $f' \geq 0$), je f na J rostoucí (resp. neklesající). Pokud na vnitřku J platí $f' < 0$ (resp. $f' \leq 0$), je f na J klesající (resp. nerostoucí).

$\Rrightarrow$ Má-li f nulovou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu J, je na J současně nerostoucí a neklesající, tedy konstantní.

Důkaz

$f'(x) > 0$: $a < b$, $a, b \in J$ chceme $f(a) < f(b)$ $=$ $f(b) > f(a)$

Lagrange: $\exists c \in (a,b) : f(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ Jelikož $f'(c) > 0$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$, $b - a > 0$

Důkaz

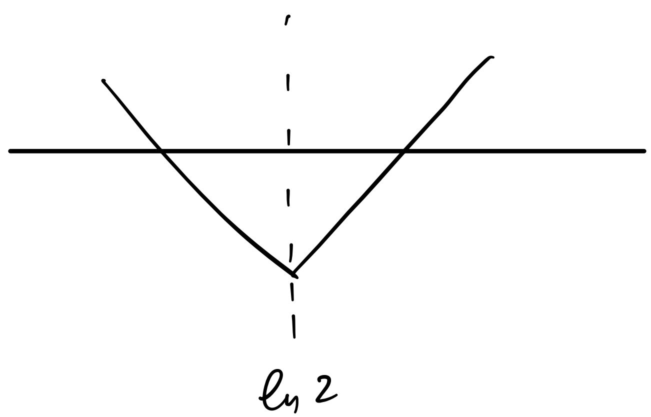
Počet řešení

Kolik různých řešení má rovnice $e^x - 2x = 2$? www.menti.com 3409 4277

Kvíz

$$(e^x - 2x - 2)' = e^x - 2 \begin{cases} > 0 & (\ln 2, +\infty) \\ < 0 & (-\infty, \ln 2) \end{cases}$$

Ilustrační:



Derivace vyšších řádů

Definice

Pokud funkce $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ má na $U(a,\delta)$ vlastní derivaci $f'(x)$ a existuje limita

$$f''(a) := \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

nazveme ji *druhou derivací* f v a. Analogicky definujeme derivace vyšších řádů: Má-li $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ na $U(a,\delta)$ derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n-1$, *derivace řádu n v a* je limita

$$f^{(n)}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a},$$

když existuje.

Příklad

$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f''(x) = 2$$

Konvexita a konkávnost

Definice

Nechť I je interval. Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je na intervalu I

- *konvexní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí
$$f(x) \le f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$
- *ryze konvexní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá,
- *konkávní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí
$$f(x) \ge f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$
- *ryze konkávní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá.

Výraz na pravé straně $=$ je rovnice přímky procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

- konvexní funkce: graf funkce f na intervalu (a, b) pod úsečkou spojující body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$
- konkávní funkce: graf leží nad touto úsečkou.

Příklady

$f(x) = \alpha x$

$f(x) = |x|$ www.menti.com 4542 3959 Kvíz

Konvexita, konkavita a druhá derivace

Věta

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, nechť funkce $f : I \to \mathbb{R}$ má na I druhou derivaci $f''(x)$. Pokud je f'' na I kladná (resp. nezáporná), je f na I ryze konvexní (resp. konvexní). Pokud je f'' na I záporná (resp. nekladná), je f na I ryze konkávní (resp. konkávní).

Funkce může být konvexní (nebo konkávní), i když druhou derivaci v některých bodech nemá!

Spojitost derivace v krajním bodě

Věta

Nechť $I = [a, b)$ *je interval, nechť funkce* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá zprava v bodě* a *a nechť má na* (a, b) *vlastní derivaci, pro níž platí* $\lim_{x \to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$*. Potom má* f *v bodě* a *derivaci zprava, pro níž platí*

$$f'_+(a) = A.$$

f musí být spojitá zprava v a!