Matematická analýza 1 (NMAI054)
7. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

31.března 2022

Derivace

Definice

Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $b \in M$ a $U(b, \delta) \subseteq M$ pro nějaké $\delta > 0$. *Derivace funkce f v bodě b* je limita

$$f'(b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0^+$ ($h \to 0^-$), resp. $x \to a^+$ ($x \to a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Derivace buď

- existuje vlastní ($f'(b) \in \mathbb{R}$), nebo
- existuje nevlastní ($f'(b) = \pm\infty$), nebo
- neexistuje.

Derivace existuje $\Leftrightarrow$ obě jednostranné derivace existují a jsou si rovny.

Jestliže má f v bodě b vlastní derivaci, říkáme, že f je v b *diferencovatelná*.

Příklady

$f(x) = 1 \quad \lim_{h \to 0} = \frac{1-1}{h} = 0$

Funkce $f(x) = x$ má derivaci rovnou 1 v každém bodě:

$$f'(b) = \lim_{x \to 0} \frac{b+h-b}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, má v b derivaci rovnou nb^{n-1}:

$$f'(b) = \lim_{x \to 0} \frac{(b+h)^n - b^n}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cancel{b^n} + nb^{n-1}h + \binom{n}{2} b^{n-2} h^2 + \dots +) - \cancel{b^n}}{h} = nb^{n-1}$$

Příklady: derivace a spojitost

- Funkce signum, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ v nule: www.menti.com: 97 11 02 7

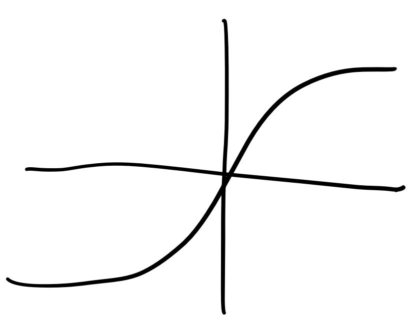
Kvíz

„funkce" v nule roste nekonečně rychle

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1-0}{h} = +\infty$$

tohle je nevlastní derivace

- Funkce absolutní hodnoty, $f(x) = |x|$, v nule nemá vůbec derivaci, protože $f'_-(0) = -1$ a $f'_+(0) = 1$.
- Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = x^{1/3}$ pro $x \geq 0$ a jako $f(x) = -(-x)^{1/3}$ pro $x < 0$ je v 0 spojitá a má tam nevlastní derivaci $+\infty$.



derivace	spojitá	nespojitá
neexistuje	$\checkmark$ abs	$\checkmark$
vlastní	$\checkmark$	$\times$
nevlastní	$\checkmark$ $\sqrt[3]{x}$	$\checkmark$ sgn

Diferencovatelnost a spojitost

Věta (Diferencovatelnost $\Rightarrow$ spojitost)

Má-li $f : U(b, \delta) \to \mathbb{R}$ v bodě b vlastní derivaci, je v b spojitá.

Důkaz

Chceme: $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$, zkusíme $\lim_{x \to b} f(x) - f(b)$ ✓ → pak by platila rovnost, co chceme

$$\lim_{x \to b} f(x) - f(-b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \cdot (x - b) \overset{AL}{=} \lim_{x \to b} \underbrace{\frac{f(x) - f(b)}{x - b}}_{f'(b) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to b} x - b}_{= 0} = 0$$

Rozdíl je nulový, takže platí vztah výše

Aritmetika derivací

Věta (Aritmetika derivací)

Nechť $f, g\colon U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ *jsou funkce, které mají v bodě* b *derivaci (vlastní či nevlastní). Pak*

(i) *Platí, že* $(f+g)'(b) = f'(b) + g'(b)$, *je-li pravá strana definovaná.*

(ii) *Pro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *platí* $(\alpha f)'(b) = \alpha(f'(b))$, *je-li pravá strana definovaná.*

(iii) *Platí* Leibnizova formule: $(fg)'(b) = f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$, *je-li pravá strana definovaná a* f *nebo* g *je spojitá v* b.

(iv) *Je-li* g *spojitá v* b, $g(b) \neq 0$ *a je-li pravá strana následující rovnosti definovaná, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(b) = \frac{f'(b)g(b) - f(b)g'(b)}{g(b)^2}.$$

Důkaz Leibnizovy formule

▸ Důkaz Chceme spočítat $(f\cdot g)'(b)$

$$(f\cdot g)'(b) = \lim_{x\to b} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(b)\cdot g(b)}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{g(x)\cdot\big(f(x)-f(b)\big) + f(b)\cdot\big(g(x)-g(b)\big)}{x-b}$$

$$\overset{AL}{=} \left(\lim_{x\to b} g(x)\right)\cdot f'(b) + f(b)\cdot g'(b)$$

g je spojité $\Rightarrow g(b)$

Odstrašující příklady

$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ a $g(x) = 0$: jen nejde použít AL.

$(fg)'(0) \overset{??}{=} +\infty \cdot 0 + 0 \cdot 0$ ✗

$= 0$

$f(x) = g(x) = \frac{1}{10} + \operatorname{sgn}(x)$: chybí spojitost $g(x)$

$(fg)'(0) \overset{??}{=} +\infty \cdot \frac{1}{10} + \infty \cdot \frac{1}{10} = +\cancel{\infty}$

Nemá derivace, protože nemá jednostranné derivace stejné.

Derivace známých funkcí

Derivace odpovídá rychlosti růstu funkce

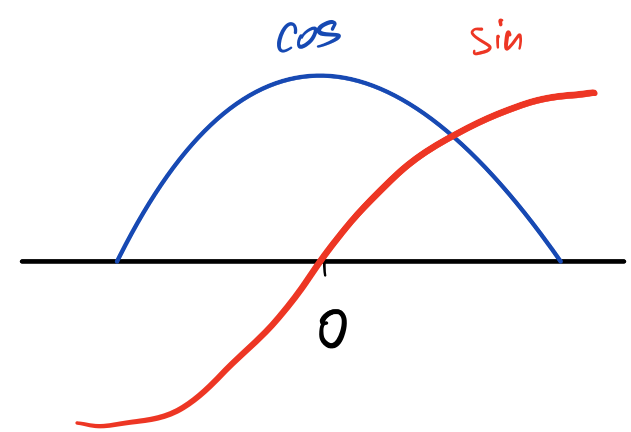
Derivováním mocninných řad lze odvodit:

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

ukazuje, jak moc roste

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$



Derivace složené funkce

Věta (Derivace složené funkce)

Nechť funkce f má derivaci v bodě b, funkce g má derivaci v bodě a, $b = g(a)$ a g je spojitá v a. Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

▸ Důkaz

$g'(a) \neq 0$ $\qquad \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0$ na okolí a $\qquad g(x) \neq g(a)$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x) - g(a)} = g'(a) \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}}_{f'(b) \text{ dle VOLSF}}$$

$$\lim_{x \to a} H(g(x))$$

Důkaz

$g'(a) = 0 \Rightarrow f'(b)$ vlastní $\Rightarrow f$ je spojitá

$$H(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}$$

Aby šlo použít VOLSF, potřebujeme H spojité

Místo H použijeme spojitou $\tilde{H}$

$$\tilde{H} \begin{cases} H(y): & y \neq b \\ f'(b): & y = b \end{cases}$$

Důkaz

Derivace a sudost/lichost

P: f je lichá

Q: f' je sudá

Která implikace mezi P a Q platí? www.menti.com 1210 8424 Kvíz

$f(x) = -f(-x)$ $\quad -$

$g(x) = -f(-x)$

Derivace inverzní funkce

Věta (Derivace inverzní funkce)

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak

(i) *Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce $f^{<-1>}$ má v b derivaci*
$$\left(f^{<-1>}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(ii) *Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $\left(f^{<-1>}\right)'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Důkaz

Důkaz

Derivace logaritmu

$$b = \exp(a)$$

$$\ln'(b) = \frac{1}{\exp'(a)} = \frac{1}{\exp(a)} = \frac{1}{x}$$

www.menti.com 50 10 29 3 Anketa