Matematická analýza 1 (NMAI054)
6. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

24.března 2022

Spojitost

Funkce f je *spojitá* v bodě $b \in \mathbb{R}$, pokud platí $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$.Tedy f je spojitá v b, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ splňující $f(U(b, \delta)) \subseteq U(f(b), \varepsilon)$.

Vnitřní bod nějakého intervalu I je bod, který v I leží i s nějakým svým okolím.

Krajní bod intervalu je bod, který není vnitřní.

Definice (Spojitost na intervalu)

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce na něm definovaná. Řekneme, že *f je na intervalu I spojitá*, je-li spojitá v každém vnitřním bodu I a v každém krajním bodě I je odpovídajícím způsobem jednostranně spojitá.

Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(0, 1)$ i na intervalu $(0, 1]$. Není však spojitá na intervalu $[0, 1)$ (bez ohledu na to zda a jak je definovaná v nule), protože $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Darbouxova věta

Věta (Darbouxova, o nabývání mezihodnot)

Nechť $a < b$ *jsou reálná čísla a nechť funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je na intervalu* $[a,b]$ *spojitá. Označme* $m = \min\{f(a), f(b)\}$ *a* $M = \max\{f(a), f(b)\}$*. Pak každé reálné číslo z intervalu* $[m,M]$ *je hodnotou funkce* f*, to jest pro každé* $y \in [m,M]$ *existuje* $\alpha \in [a,b]$*, že* $f(\alpha) = y$*.*

▸ Důkaz

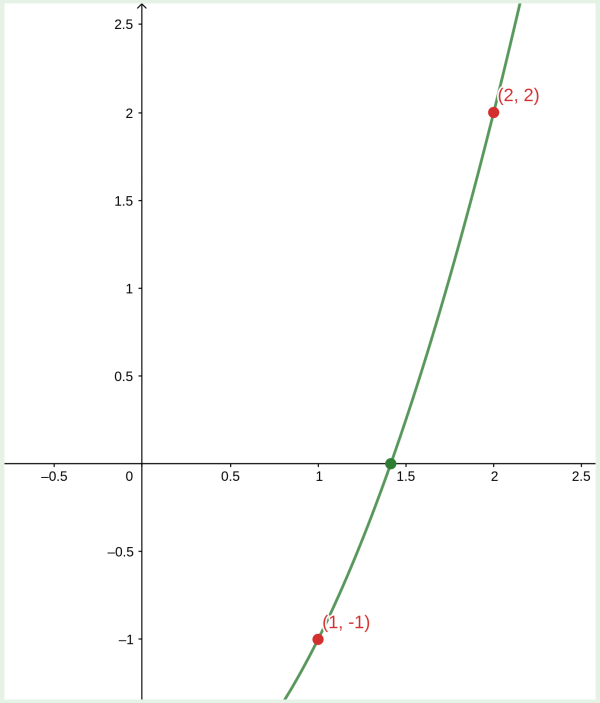
Metoda půlení intervalů

Přibližný výpočet kořenů spojité funkce

Polynom $f(x) = x^2 - 2$ je spojitá funkce. Protože $f(1) = -1$ a $f(2) = 2$, z předchozí věty plyne, že f má kořen x (tj. $f(x) = 0$) z intervalu $(1, 2)$. Postupným půlením intervalu můžeme tento kořen přibližně numericky spočítat, tedy aproximovat hodnotu $\sqrt{2}$:

$$f(1.5) = 0.25 > 0 \text{ tedy } x \in (1, 1.5)$$
$$f(1.25) = -0.4375 < 0 \text{ tedy } x \in (1.25, 1.5)$$
$$f(1.375) = -0.109375 < 0 \text{ tedy } x \in (1.375, 1.5)$$

A tak dále.



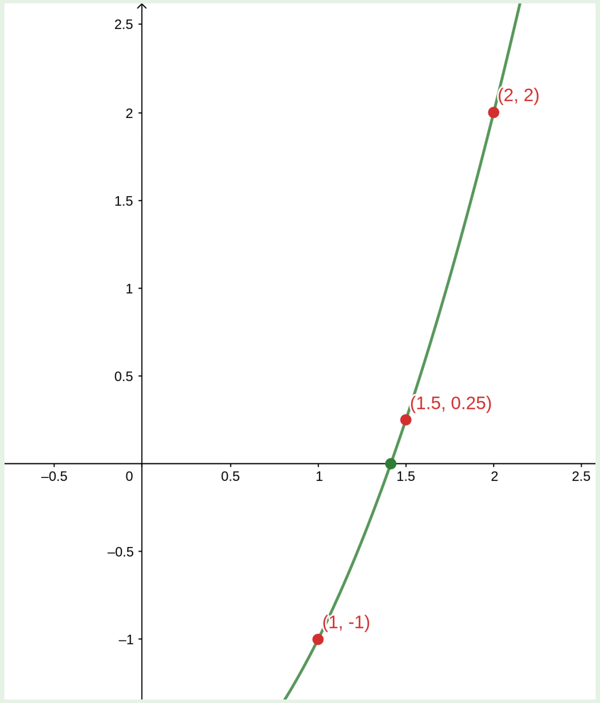
Metoda půlení intervalů

Přibližný výpočet kořenů spojité funkce

Polynom $f(x) = x^2 - 2$ je spojitá funkce. Protože $f(1) = -1$ a $f(2) = 2$, z předchozí věty plyne, že f má kořen x (tj. $f(x) = 0$) z intervalu $(1, 2)$. Postupným půlením intervalu můžeme tento kořen přibližně numericky spočítat, tedy aproximovat hodnotu $\sqrt{2}$:

$$f(1.5) = 0.25 > 0 \text{ tedy } x \in (1, 1.5)$$
$$f(1.25) = -0.4375 < 0 \text{ tedy } x \in (1.25, 1.5)$$
$$f(1.375) = -0.109375 < 0 \text{ tedy } x \in (1.375, 1.5)$$

A tak dále.



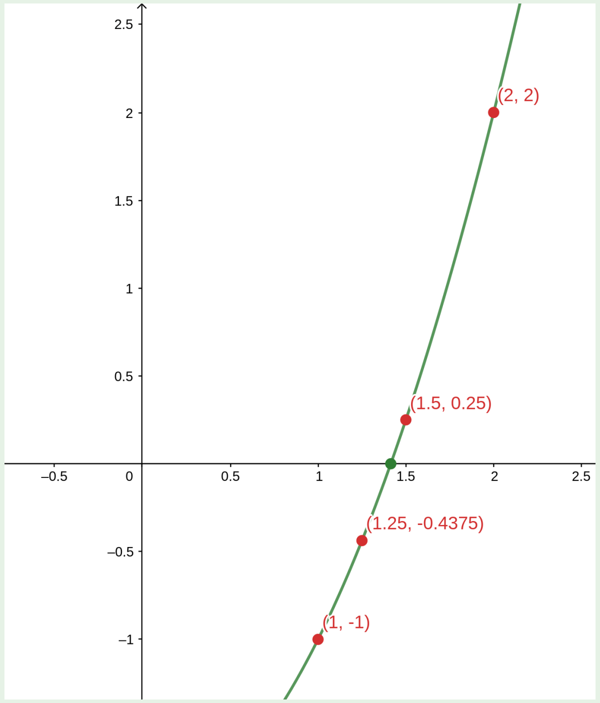
Metoda půlení intervalů

Přibližný výpočet kořenů spojité funkce

Polynom $f(x) = x^2 - 2$ je spojitá funkce. Protože $f(1) = -1$ a $f(2) = 2$, z předchozí věty plyne, že f má kořen x (tj. $f(x) = 0$) z intervalu $(1, 2)$. Postupným půlením intervalu můžeme tento kořen přibližně numericky spočítat, tedy aproximovat hodnotu $\sqrt{2}$:

$$f(1.5) = 0.25 > 0 \text{ tedy } x \in (1, 1.5)$$
$$f(1.25) = -0.4375 < 0 \text{ tedy } x \in (1.25, 1.5)$$
$$f(1.375) = -0.109375 < 0 \text{ tedy } x \in (1.375, 1.5)$$

A tak dále.



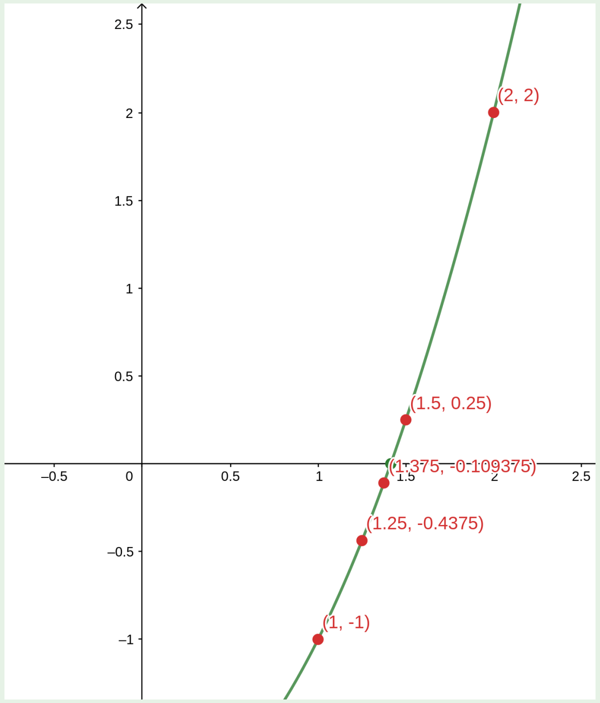
Metoda půlení intervalů

Přibližný výpočet kořenů spojité funkce

Polynom $f(x) = x^2 - 2$ je spojitá funkce. Protože $f(1) = -1$ a $f(2) = 2$, z předchozí věty plyne, že f má kořen x (tj. $f(x) = 0$) z intervalu $(1, 2)$. Postupným půlením intervalu můžeme tento kořen přibližně numericky spočítat, tedy aproximovat hodnotu $\sqrt{2}$:

$$
\begin{aligned}
f(1.5) &= 0.25 > 0 \text{ tedy } x \in (1, 1.5) \\
f(1.25) &= -0.4375 < 0 \text{ tedy } x \in (1.25, 1.5) \\
f(1.375) &= -0.109375 < 0 \text{ tedy } x \in (1.375, 1.5)
\end{aligned}
$$

A tak dále.



Důsledky Darbouxovy věty

Důsledek (Obraz spojité funkce)

Spojitá funkce zobrazuje interval na interval. To jest, je-li $J \subseteq \mathbb{R}$ interval a $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, je množina $f(J) = \{f(x) \colon x \in J\}$ opět interval.

Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé:
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každý interval I je $f(I)$ také interval (případně jednobodový). Potom je tato funkce spojitá na $\mathbb{R}$.
www.menti.com: 5324 8299 Kvíz

Důsledky Darbouxovy věty

Důsledek (Obraz spojité funkce)

Spojitá funkce zobrazuje interval na interval. To jest, je-li $J \subseteq \mathbb{R}$ *interval a* $f : J \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce, je množina* $f(J) = \{f(x) \colon x \in J\}$ *opět interval.*

Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé:
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každý interval I je $f(I)$ také interval (případně jednobodový). Potom je tato funkce spojitá na $\mathbb{R}$.
www.menti.com: 5324 8299 ▸ Kvíz

Připomeňme: inverzní funkce k f existuje, pouze pokud je f prostá.

- je-li spojitá funkce prostá na intervalu J, je na J buď rostoucí, nebo klesající

Spojitost inverzní funkce

Theorem (Spojitost inverzní funkce)

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ *je interval a* $f\colon J \to \mathbb{R}$ *je spojitá a rostoucí (klesající) funkce. Potom inverzní funkce* $f^{<-1>}\colon K \to J$*, kde* K *je interval* $f(J)$*, je rovněž spojitá a rostoucí (klesající).*

▸ Důkaz

Spojité funkce - přehled

- funkce x, $|x|$, e^x, $\sin x$ a $\cos x$ jsou spojité na celém svém definičním oboru. (Nebudeme dokazovat.)
- z předchozí věty plyne spojitost logaritmu a cyklometrických funkcí
- spojitost dalších funkcí ($\tan(x)$ nebo $\sqrt{x}$), zde odvodit z Věty o aritmetice limit a Věty o limitě složené funkce: součet, součit, rozdíl, podíl a složení spojitých funkcí je spojitá funkce

Extrémy

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f v bodě $a \in M$ nabývá (na množině M) svého

- *minima*, když $\forall x \in M: \; f(x) \geq f(a)$;
- *maxima*, když $\forall x \in M: \; f(x) \leq f(a)$;
- *ostrého minima*, když $\forall x \in M, x \neq a: \; f(x) > f(a)$;
- *ostrého maxima*, když $\forall x \in M, x \neq a: \; f(x) < f(a)$;
- *lokálního minima*, když $\exists \delta > 0 \; \forall x \in M \cap U(a, \delta): \; f(x) \geq f(a)$;
- *lokálního maxima*, když $\exists \delta > 0 \; \forall x \in M \cap U(a, \delta): \; f(x) \leq f(a)$.

Ostré lokální extrémy jsou definovány analogicky.

Princip maxima

Věta (Princip maxima pro spojité funkce)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ *a* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce. Potom* f *nabývá na intervalu* $[a, b]$ *svého maxima i minima.*

▸ Důkaz

Obecné metrické prostory

Definice (Limita a spojitost v metrických prostorech)

Pro metrický prostor (M, d) definujeme okolí a prstencové δ-okolí bodu $\mathbf{a} \in M$ pro $\delta > 0$ jako

$$U_M(\mathbf{a}, \delta) = \{\mathbf{x} \in M | \ d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < \delta\} \text{ a}$$

$$P_M(\mathbf{a}, \delta) = U_M(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}.$$

Nechť (M, d) a (N, e) jsou dva metrické prostory. Řekneme, že funkce $f\colon M \to N$ *má v bodě* $\mathbf{a} \in M$ *limitu* $A \in N$, platí-li

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon f(P_M(\mathbf{a}, \delta)) \subseteq U_N(A, \varepsilon),$$

což zapisujeme

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A.$$

Funkce f je v bodě $\mathbf{a}$ *spojitá*, pokud

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Funkce f je *spojitá*, pokud je spojitá v každém bodě M.

Kompaktní množina

Definice (Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$)

Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *omezená*, pokud existuje bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$ takové, že $M \subseteq U(\mathbf{a}, r)$. Jinými slovy, M je obsaženo v r-okolí bodu $\mathbf{a}$ (okolí zde uvažujeme v prostoru $\mathbb{R}^n$). Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *otevřená*, pokud pro každý bod $\mathbf{a} \in M$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U(\mathbf{a}, \delta) \subseteq M$ (zde opět bereme okolí v $\mathbb{R}^n$). Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *uzavřená*, pokud $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená množina. Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *kompaktní*, pokud je omezená a uzavřená.

Které množiny jsou kompaktní? www.menti.com: 6342 6417 Kvíz

Kompaktní množiny se obecně definují jinak, v obecném metrickém prostoru nemusí být každá omezená a uzavřená množina nutně kompaktní!

Kompaktní množina

Definice (Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$)

Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *omezená*, pokud existuje bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$ takové, že $M \subseteq U(\mathbf{a}, r)$. Jinými slovy, M je obsaženo v r-okolí bodu $\mathbf{a}$ (okolí zde uvažujeme v prostoru $\mathbb{R}^n$). Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *otevřená*, pokud pro každý bod $\mathbf{a} \in M$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U(\mathbf{a}, \delta) \subseteq M$ (zde opět bereme okolí v $\mathbb{R}^n$). Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *uzavřená*, pokud $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená množina. Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *kompaktní*, pokud je omezená a uzavřená.

Které množiny jsou kompaktní? www.menti.com: 6342 6417 Kvíz

Kompaktní množiny se obecně definují jinak, v obecném metrickém prostoru nemusí být každá omezená a uzavřená množina nutně kompaktní!

Věta

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom f nabývá na množině M svého maxima i minima.

Zpětná vazba

www.menti.com: 8563 5466 ▸ Anketa

www.menti.com: 8046 8025 ▸ Anketa