Matematická analýza 1 (NMAI054)
5. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

17.března 2022

Obraz množiny

Pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ nechť $f(M) = \{f(x);\ x \in M\}$.

Místo

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in P(b,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(L,\varepsilon).$$

lze definici limity funkce zapsat jako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(P(b,\delta)) \subseteq U(L,\varepsilon)$$

Vztah mezi limitou funkce a posloupnosti

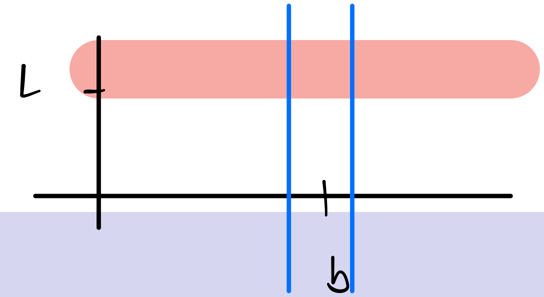
Která implikace platí mezi následujícími tvrzeními pro každou funkci definovanou na $[-1, 1]$:

P: Limita posloupnosti $(f(\frac{1}{n}))_{n=1}^{\infty}$ je 5.

Q: Limita posloupnosti $lim_{x \to 0} f(x) = 5$

www.menti.com: 77 30 87 9 Kvíz

Heineho definice limity



Věta (Heineho definice limity)

Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\lim_{x \to b} f(x) = L$;

(ii) *pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, pro níž platí $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.* $x_n \neq b \ \forall n$

Důkaz $(i) \Rightarrow (ii)$ $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$

Nechť platí (i). Mějme posloupnost $(x_n) \subseteq P(\overset{b}{\cancel{x}}, \Delta)$ s limitou b a dokažme, že posloupnost $(f(x_n))$ má limitu L. Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$. Díky (i) víme, že existuje $\delta > 0$ splňující $f(P(b, \delta)) \subseteq U(L, \varepsilon)$. Protože (x_n) má limitu b a zároveň $x_n \neq b$ pro každé n, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_0$ platí $x_n \in P(b, \delta)$. Pro $n > n_0$ tudíž platí $f(x_n) \in U(L, \varepsilon)$. Proto $f(x_n) \to L$ pro $n \to \infty$, a tedy platí (ii).

Heineho definice limity

Věta (Heineho definice limity)

Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\lim_{x\to b} f(x) = L$;

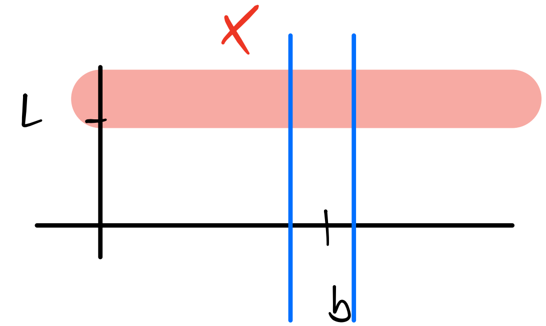
(ii) *pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, pro níž platí $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.*

Důkaz $(i) \Leftarrow (ii)$

Nyní předpokládejme, že (i) neplatí, tj. $\lim_{x\to b} f(x)$ neexistuje nebo se nerovná L. To znamená, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in P(b, \delta)$ s vlastností $f(x) \notin U(L, \varepsilon)$. Pro každé $\delta = \min\{1/n, \Delta\}$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$, vezmeme takové x a označíme ho x_n. Zjevně $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ a $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, ale $f(x_n) \notin U(L, \varepsilon)$, takže $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ není L. Tedy (ii) také neplatí; není splněn pro posloupnost (x_n). □

Důkaz:

Důsledky Heineho věty



$$\text{věta o limitě posloupnosti} \xrightarrow{\textit{Heine}} \text{věta o limitě funkce}$$

Věta (Aritmetika limit funkcí)

Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, *nechť* f *a* g *jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí* $P(a, \Delta)$ *bodu* a, *a nechť platí* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *a* $\lim_{x\to a} g(x) = B$. *Potom*

(a) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$, *je-li tento součet definován.*

(b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *je-li tento součin definován.*

(c) *Nechť je navíc* $g(x)$ *nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu* a. *Pak* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$, *je-li tento podíl definován.*

Důkaz $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$

Důkaz (a)

Nechť $(x_n) \subseteq P(a, \Delta)$ je posloupnost s limitou a. Protože $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, podle Heineho věty (implikace $\Rightarrow$) máme, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Podle věty o aritmetice limit posloupností pak i $\lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = A + B$. Tedy $f + g$ splňuje (ii) Heineho věty a to podle Heineho věty (implikace $\Leftarrow$) znamená, že $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$. $\square$

Limity funkcí a uspořádání

Věta (Limity funkcí a uspořádání)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a funkce f, g a h jsou definované na nějakém prstencovém okolí bodu c.

(i) *Mají-li funkce f a g v bodě c limitu a $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) > g(x)$ pro každé $x \in P(c,\delta)$.*

(ii) *Existuje-li $\delta > 0$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in P(c,\delta)$, a mají-li funkce f a g limitu v bodě c, potom $\lim_{x\to c} f(x) \geq \lim_{x\to c} g(x)$.*

(iii) *Existuje-li $\delta > 0$ takové, že $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in P(c,\delta)$ a $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, potom i $\lim_{x\to c} h(x) = A$.*

Limita monotónní funkce

Věta (Limita monotónní funkce)

Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je na intervalu (a, b) monotónní. Potom existují (případně nevlastní) jednostranné limity

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad a \quad \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Větu lze rozšířit i na případ, kdy $b = +\infty$ nebo $a = -\infty$.

Důkaz

Důkaz

Budeme předpokládat, že f je neklesající a dokážeme existenci limity f v bodě a zprava, ostatní případy jsou analogické. Položme

$$\alpha = \inf\{f(x);\ x \in (a, b)\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

a dokažme, že $\lim_{x\to a+} f(x) = \alpha$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice infima plyne, že pro každé $x \in (a, b)$ platí $f(x) \geq \alpha$ a také že existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $f(x_0) \in U(\alpha, \varepsilon)$. Díky monotonii pak víme, že pro každé $x \in (a, x_0)$ máme $f(x) \in U(\alpha, \varepsilon)$. Zvolme $\delta > 0$ dost malé na to, aby platilo $P^+(a, \delta) \subseteq (a, x_0)$. Potom platí $f(P^+(a, \delta)) \subseteq U(\alpha, \varepsilon)$, tudíž $\lim_{x\to a+} f(x) = \alpha$. $\square$

Spojitost

Definice (Spojitost funkce)

Funkce f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ *spojitá*, pokud

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Funkce $f(x)$ je v bodě a *spojitá zprava*, pokud $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$. Podobně se definuje spojitost zleva.

- funkce je v daném bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zleva i zprava

Spojitost - příklad

Funkce $\operatorname{sgn}(x)$

- je spojitá v libovolném bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, neboť je na dostatečně malém okolí takového bodu konstantní
- v bodě $a = 0$ není spojitá, protože v tomto bodě nemá limitu.
- v bodě $a = 0$ není ani jednostranně spojitá, protože $\operatorname{sgn}(0) = 0$, zatímco obě jednostranné limity jsou nenulové

Spojitost - příklad

Riemannova funkce

Definujme funkci $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ následovně:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální} \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q} \text{ racionální a } p, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná} \end{cases}$$

Ve kterých bodech je Riemannova funkce spojitá? www.menti.com: 8667 1035 ▸ Kvíz

Limita složené funkce

Věta (Limita složené funkce)

Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, *nechť* $g(x)$ *je funkce splňující* $\lim_{x\to A} g(x) = B$ *a* $f(x)$ *je funkce splňující* $\lim_{x\to B} f(x) = C$*. Navíc nechť je splněna aspoň jedna z podmínek* **P1** *a* **P2***:*

P1. *Funkce* $f(x)$ *je spojitá v* B *(tedy,* $f(B) = \lim_{x\to B} f(x) = C$*).*

P2. *Na nějakém prstencovém okolí* $P(A, \eta)$ *funkce* $g(x)$ *nenabývá hodnotu* B*, tj.* $B \notin g(P(A, \eta))$*.*

Potom

$$\lim_{x\to A} f(g(x)) = C.$$

Budeme chtít ukázat, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\gamma > 0$ takové, že $f(g(P(A,\gamma))) \subseteq U(C, \varepsilon)$

Důkaz VOLSF

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{x\to B} f(x) = C$, existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(P(B,\delta)) \subseteq U(C,\varepsilon). \tag{1}$$

Protože $\lim_{x\to A} g(x) = B$, tak pro toto δ existuje $\gamma > 0$ takové, že

$$g(P(A,\gamma)) \subseteq U(B,\delta). \tag{2}$$

Jediná obtíž nyní je ta, že okolí $U(B,\delta)$ není obsaženo v okolí $P(B,\delta)$, má navíc bod B. Musíme využít toho, že platí jedna z podmínek **P1** a **P2**.

Pokud je splněna podmínka **P1**, tj. pokud platí $f(B) = C$, tak nejen

$$f(P(B,\delta)) \subseteq U(C,\varepsilon), \text{ ale } f(U(B,\delta)) \subseteq U(C,\varepsilon).$$

Pak obtíž mizí a dostaneme

$$f(g(P(A,\gamma))) \subseteq f(U(B,\delta)) \subseteq U(C,\varepsilon), \text{ tedy } \lim_{x\to A} f(g(x)) = C.$$

Pokud je splněna podmínka **P2**, můžeme $\gamma > 0$ zvolit tak, aby navíc platilo $\gamma < \eta$, a potom

$$g(P(A,\gamma)) \subseteq P(B,\delta).$$

Obtíž opět mizí a dostaneme

$$f(g(P(A,\gamma))) \subseteq f(P(B,\delta)) \subseteq U(C,\varepsilon) \text{ tedy } \lim_{x\to A} f(g(x)) = C. \quad \square$$

Asymptotické symboly o a O

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta > 0$, a funkce f, g jsou definované na prstencovém okolí $P(a, \delta)$, přičemž g je na něm kladná. Říkáme, že *funkce f je velké o funkce g pro x jdoucí k a* a píšeme, že $f = O(g)$ pro $x \to a$, pokud existuje $c > 0$ tak, že

$$\forall x \in P(a, \delta) \colon |f(x)| < cg(x).$$

Pokud

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

píšeme, že $f = o(g)$ pro $x \to a$, a říkáme, že *funkce f je malé o funkce g pro x jdoucí k a*.

- $f = o(g)$ pro $x \to a \Rightarrow f = O(g)$ pro $x \to a$

Výrazy $f = O(g)$ a $f = o(g)$ nejsou rovnosti, $f = O(g)$ i $f = o(g)$ platí pro mnoho různých funkcí f.

Správnější (ale zřídka používaný) zápis by byl $f \in O(g)$ nebo $f \in o(g)$.

Použití asymptotické notace

Asymptotické porovnávání lze využít při výpočtu limity podílu:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 2}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + o(x^3)}{x^3} = 2 + 0.$$

Zpětná vazba:
www.menti.com: 7626 2679 ▸ Kvíz
www.menti.com: 8046 8025 ▸ Kvíz