Matematická analýza 1 (NMAI054)
4. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

10.března 2022

Vlastnosti funkcí

Definice

Řekneme, že funce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ je

- *shora omezená* pokud existuje $K \in \mathbb{R}$, že $f(x) < K$ pro každé $x \in M$,
- *zdola omezená* pokud existuje $K \in \mathbb{R}$, že $f(x) > K$ pro každé $x \in M$,
- *omezená* pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí* pokud $f(x) < f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *neklesající* pokud $f(x) \leq f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *klesající* pokud $f(x) > f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *nerostoucí* pokud $f(x) \geq f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *monotónní* pokud je neklesající nebo nerostoucí

Existují monotónní funkce neomezené shora i zdola: $f(x) = x$.

Další vlastnosti funkcí

Definice

- *periodická* funkce s periodou $p \in \mathbb{R}, p > 0$, když pro každé $x \in M$ je i $x \pm p \in M$ a $f(x) = f(x \pm p)$,
- *prostá* pokud $x \neq y$ implikuje $f(x) \neq f(y)$,

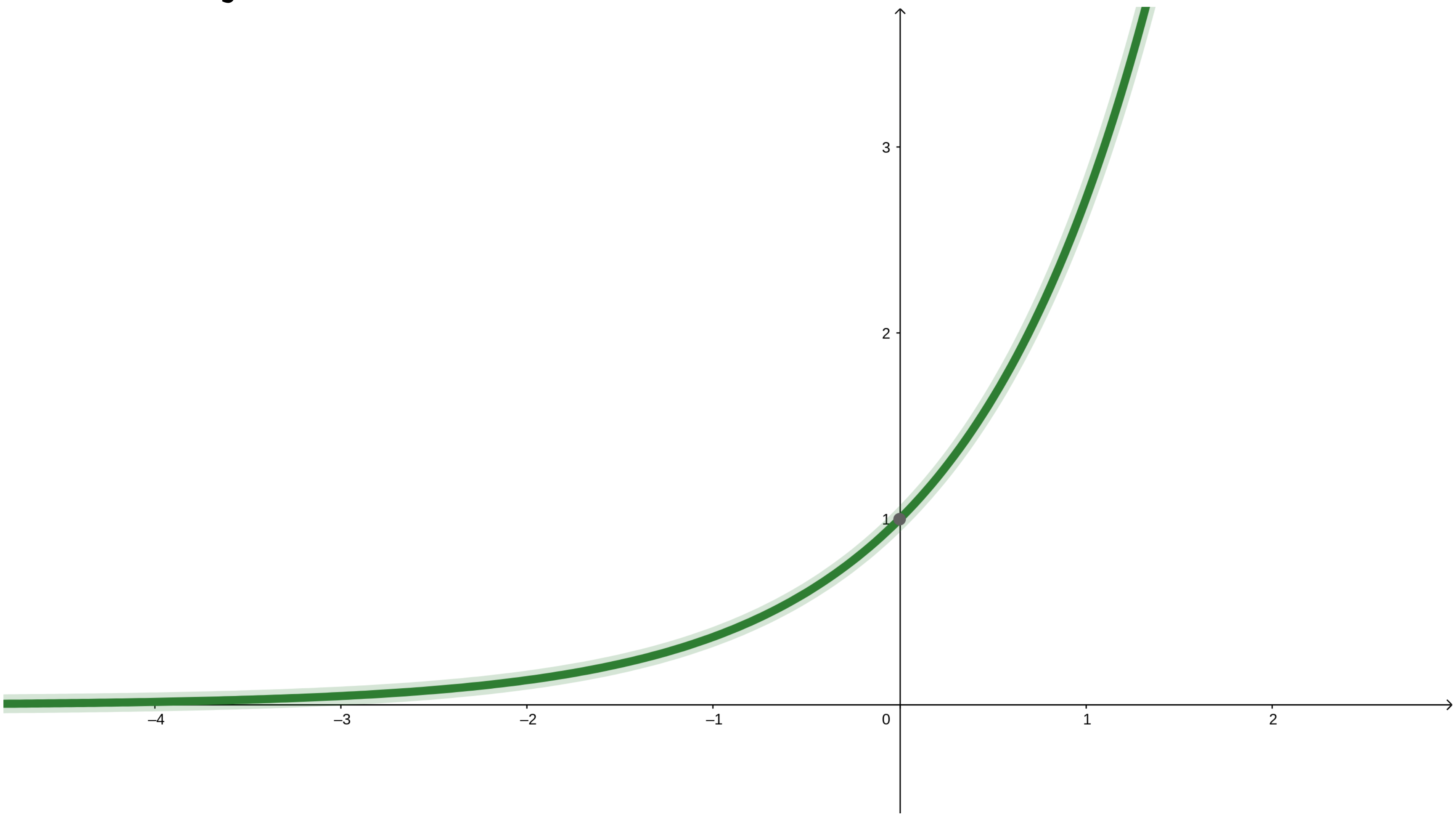
Musí být prostá funkce monotónní? www.menti.com: 1744 2689 Kvíz

Definice

Nechť $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$ je prostá funkce. Funkce $f^{<-1>}$ je *inverzní funkce k funkci f*, pokud $f^{<-1>}(y) = x$ právě tehdy, když $f(x) = y$.

Exponenciála

Jak definujeme 2^{π}?



Exponenciála

Definice

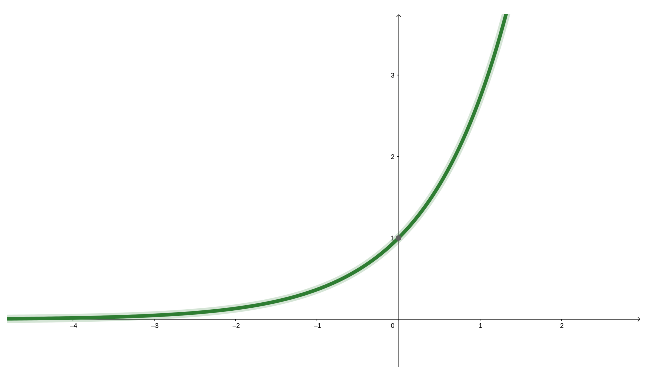
Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ definujeme *exponenciální funkci* jako součet řady

$$e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \, .$$

- řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže funkce je všude definovaná
- $e^0 = 1$
- $e^x > 1$ pro $x > 0$
- *Eulerovo číslo* e definujeme jako $exp(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2,7$
- e je iracionální

Alternativně lze exponenciálu definovat jako limitu:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



Vlastnosti exponenciály

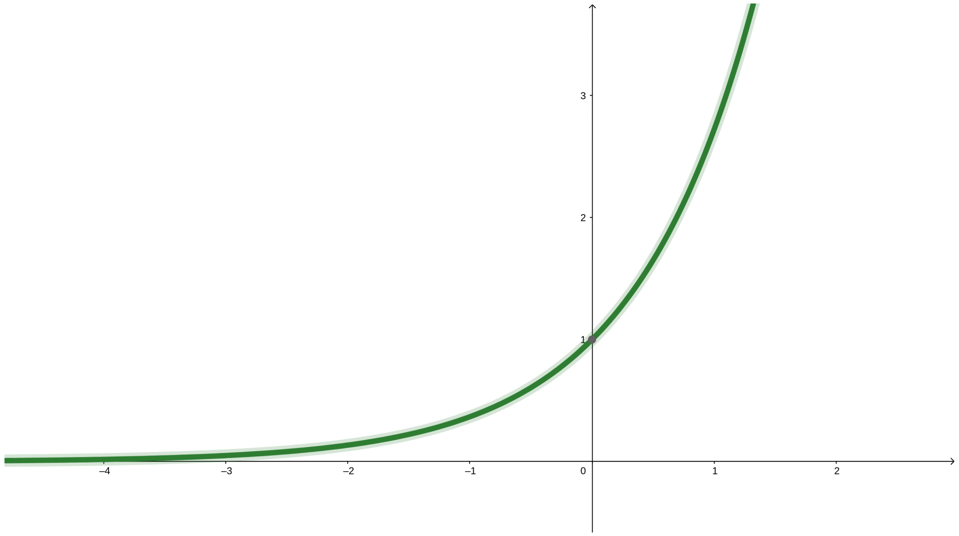
Věta (Funkce *exp* převádí součet na součin)

Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ *je*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\ .$$

$\Rightarrow$ následující vlastnosti exponenciální funkce:

- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ (protože $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$),
- $\exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(x) < 1$ pro $x < 0$,
- $\exp(x)$ je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, protože pokud $x < y$, $\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x)$ a $\exp(y-x) > 1$,
- $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = +\infty$, a
- $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$.



Logaritmus

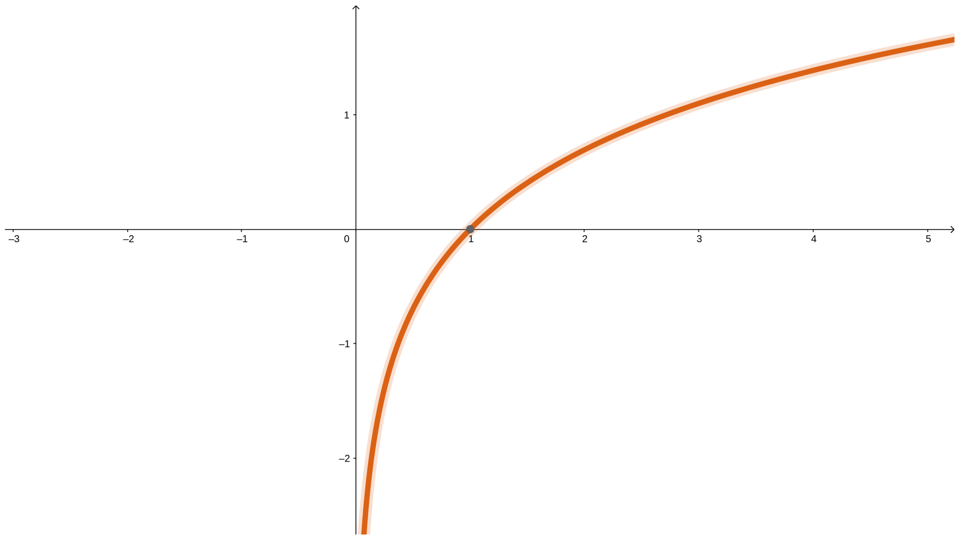
Věta (Logaritmus)

Pro každé kladné $y \in \mathbb{R}$ má rovnice

$$e^x = y$$

právě jedno řešení $x \in \mathbb{R}$, které označíme jako $\ln y := x$.
Nazýváme ho přirozený logaritmus čísla y.

Přirozený logaritmus je tedy inverzní funkcí k $\exp(x)$.



Různé základy exponenciály a logaritmu

Definice

Pro kladné reálné číslo b a reálné číslo x definujeme $b^x := \exp(x \ln b)$. Pro kladné reálné číslo $b \neq 1$, definujeme *logaritmus o základu b*, píšeme $\log_b x$, jako inverzní funkci k b^x.

Logaritmus o dané bázi lze z přirozeného logaritmu spočíst jako $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Goniometrické funkce

Definice (Goniometrické funkce)

Funkce *sinus a cosinus* definujeme jako součet následujících řad

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

a

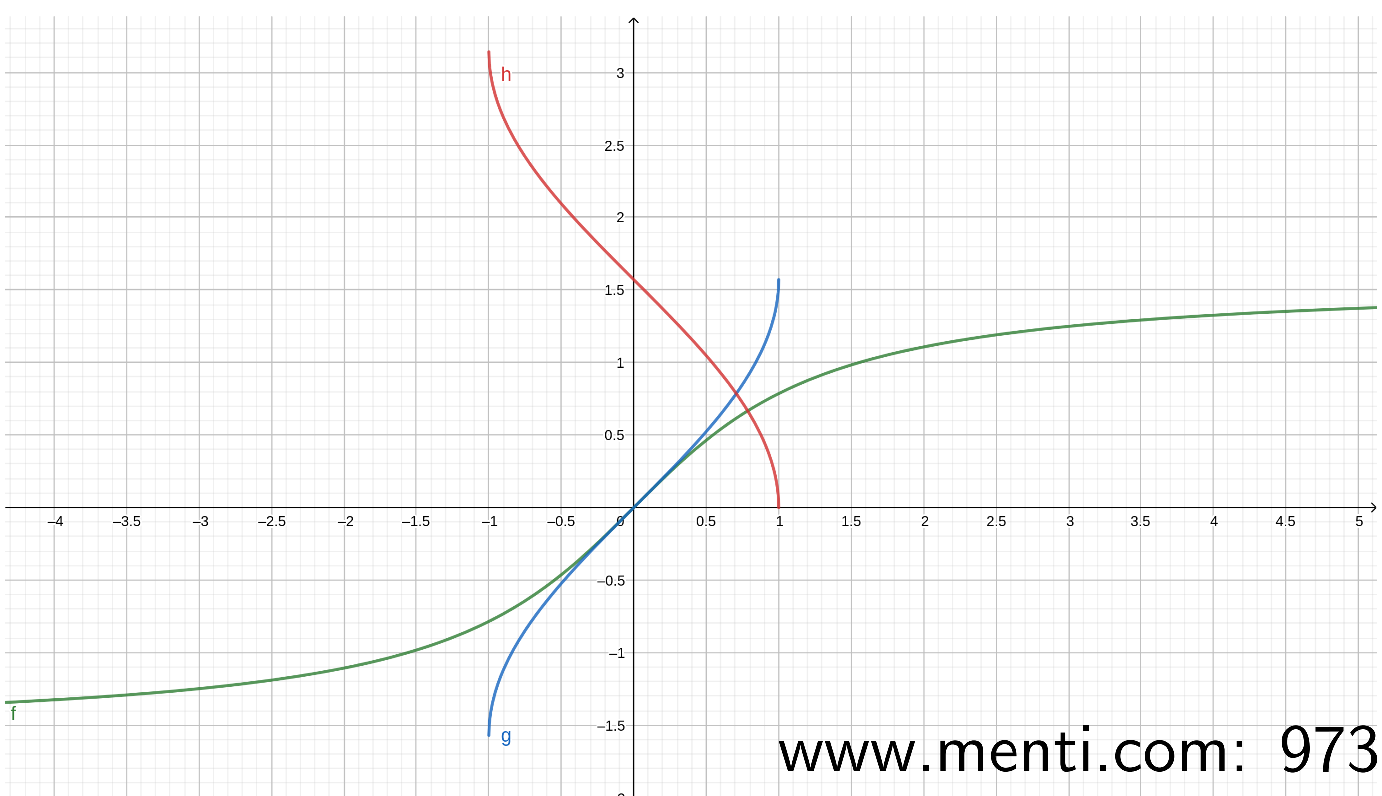
$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Funkce *tangens a cotangens* jsou definovány jako $\tan x$ (nebo $\operatorname{tg} x$) $= \frac{\sin x}{\cos x}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Cyklometrické funkce

Definice (Cyklometrické funkce)

Funkce *arkus sinus* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je definována jako inverzní funkce k funkci sinus na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Funkce *arkus cosinus* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ je definována jako inverzní funkce k funkci cosinus na intervalu $[0, \pi]$.
Funkce *arkus tangens* $\arctan : (-\infty, \infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$ je definována jako inverzní funkce k funkci tangens na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.



www.menti.com: 9732 9652 Kvíz

Okolí bodu

Definice (Okolí bodu)

Okolí (δ-okolí) bodu $a \in \mathbb{R}$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$ je interval

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < \delta\}.$$

Okolí nekonečen definujeme jako

$$U(+\infty, \delta) = (1/\delta, +\infty), \qquad U(-\infty, \delta) = (-\infty, -1/\delta)$$

Pravé okolí, resp. *levé okolí*, bodu $a \in \mathbb{R}$ je interval

$$U^+(a, \delta) = [a, a + \delta), \qquad U^-(a, \delta) = (a - \delta, a]$$

Prstencová okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ jsou obyčejná okolí s vyjmutým bodem a:

$$P(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$$

$$P^+(a, \delta) = U^+(a, \delta) \setminus \{a\}$$

$$P^-(a, \delta) = U^-(a, \delta) \setminus \{a\}$$

Prstencová okolí nekonečen jsou stejná jako jejich obyčejná okolí.

Limita posloupnosti

Definice (Vlastní limita)

Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je *(vlastní) limita* posloupnosti (a_n), pokud pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$.

Definice (Nevlastní limita)

Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n < K$.

Definice (Limita)

Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $A \in \mathbb{R}^*$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(A, \varepsilon).$$

Limita funkce

Definition (Limita funkce)

Řekneme, že funkce f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* $A \in \mathbb{R}^*$, když

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Zapisujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Limita funkce f v bodě a nezávisí na její hodnotě v a, f ani nemusí být v a definovaná.

Příklady

Pokud $f(x) = x$ a $a \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x \to a} f(x) = a$. Pokud změníme hodnotu funkce v nule a definujeme f jako

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

pak stále $\lim_{x \to a} f(x) = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$, i pro $a = 0$.

Příklady

Funkce *signum* (znaménko), která je definovaná předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

má limitu $\lim_{x \to a} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(a)$ pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje.

Jednostranné limity

Definice (Jednostranné limity)

Funkce $f(x)$ má v bodě $a \in R$ *limitu zprava* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, zapisujeme

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = A,$$

pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ x \in P^+(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Analogicky se definujeme *limitu zleva*, $P^+(a, \delta)$ se nahradí levým prstencovým okolím $P^-(a, \delta)$.

Jestliže $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = A$, pak $\lim_{x \to a} f(x) = A$. Naopak, pokud jsou limity zprava a zleva různé, limita neexistuje.

Jednoznačnost limity funkce

Věta (Jednoznačnost limity funkce)

Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz

$A, B \in \mathbb{R}^*$ buďte dvě různé limity funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Protože $A \neq B$, lze zvolit tak malé $\varepsilon > 0$, že $U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$. Mají existovat $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že $x \in P(a, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$ a $x \in P(a, \delta_2) \Rightarrow f(x) \in U(B, \varepsilon)$. Pro $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$ máme, že $x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon)$. To je ale spor, tato dvě okolí jsou disjunktní a současně v jejich průniku má ležet nějaké $f(x)$. $\square$

Heineho definice limity

Věta (Heineho definice limity)

Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\lim_{x \to b} f(x) = L$;

(ii) *pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, pro níž platí $\lim_{n \to \infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.*

Heineho definice limity - použití

Funkce $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, která je definovaná na množině $M = \mathbb{R} \backslash \{0\}$, nemá limitu v nule.

Uvažme dvě posloupnosti (x_n) a (y_n), kde

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{a} \quad y_n = \frac{1}{(2n + 1/2)\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

- $\lim x_n = \lim y_n = 0$, ale
- $f(x_n) = \sin(1/x_n) = 0$ a $f(y_n) = \sin(1/y_n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ neexistuje