Matematická analýza 1 (NMAI054)
3. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

3.března 2022

Hromadný bod

$$(-1)^n \quad \begin{cases} (-1)^{2n} = \lim = 1 \\ (-1)^{2n+1} = \lim = -1 \end{cases} \Bigg\} \text{ hromadné body}$$

Definice (Hromadný bod)

Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Rozšířené reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je jejím *hromadným bodem*, pokud je limitou nějaké podposloupnosti (a_n).

Z Věty o limitě podposloupnosti plyne, že pokud má posloupnost (a_n) limitu a, a je jediným hromadným bodem (a_n).

Kolik hromadných bodů má posloupnost $\left(\frac{n}{n+1} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$?
www.menti.com: 9792 1460 Kvíz

→ posloupnost má neprázdnou množinu hromadných bodů

Monotónní podposloupnost

Věta (O monotónní podposloupnosti)

Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má monotónní podposloupnost.*

Monotónní podposloupnost

Věta (O monotónní podposloupnosti)

Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má monotónní podposloupnost.

konečně mnoho

Důkaz

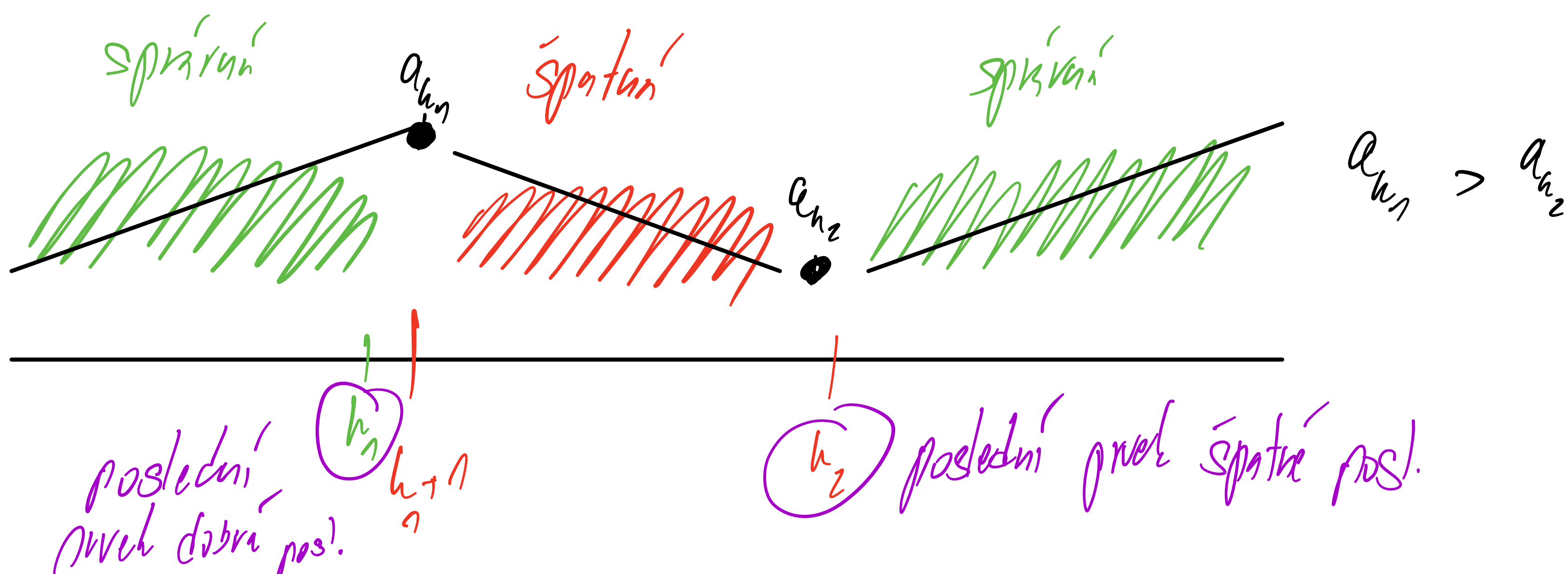
nekonečně mnoho

Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je libovolná posloupnost. Řekneme, že v indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná *dobrá posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \ldots$, že $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \ldots$, a že v k začíná *špatná posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \ldots < k_j$, že $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \ldots \leq a_{k_j} > a_n$ pro každé $n > k_j$. V prvním případě tedy členem a_k začíná nekonečná neklesající podposloupnost, a ve druhém taková konečná neklesající podposloupnost, že už ji nelze prodloužit.

Zřejmě v každém indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná dobrá posloupnost nebo v něm začíná špatná posloupnost. (Vystartujeme z k a libovolně budujeme neklesající podposloupnost. Když se nikdy nezastavíme, máme dobrou posloupnost, a když nastane krok, kdy už nemůžeme nijak pokračovat, máme špatnou posloupnost.)

Monotónní podposloupnost - důkaz

Pokud v indexu 1 začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v 1 špatná posloupnost a jako $k_1 > 0$ definujeme její poslední index. Pokud v indexu $k_1 + 1$ začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v $k_1 + 1$ špatná posloupnost a jako $k_2 > k_1$ definujeme její poslední index. Takto pokračujeme dále. Pokud někdy dostaneme dobrou posloupnost, jsme hotovi, protože (a_n) má neklesající podposloupnost. Pokud ji nikdy nedostaneme a máme stále špatné posloupnosti, vezmeme jejich poslední indexy $1 \leq k_1 < k_2 < \dots$. Podle definice špatné posloupnosti tvoří klesající podposloupnost $a_{k_1} > a_{k_2} > \dots$ a jsme zase hotovi. $\square$



Bolzanova–Weierstrassova věta

Věta (Bolzanova–Weierstrassova)

Každá omezená posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má konvergentní podposloupnost.*

– musí mít monotónní podposloupnost, která musí mít vlastní limitu.

→ tedy že každá omezená má hromadný bod.

Neomezená má pak nevlastní +/– ∞, což bude taky hromadný bod.

Bolzanova–Weierstrassova věta

Věta (Bolzanova–Weierstrassova)

Každá omezená posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz

Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená. Podle předchozí věty má (a_n) monotónní podposloupnost (b_n), jež je zjevně omezená. Podle Věty o limitě monotónní posloupnosti je (b_n) konvergentní.

$\Rightarrow$ každá omezená posloupnost hromadný bod (pro neomezenou posloupnost je to ∞ nebo $-\infty$)

Množina hromadných bodů

Označíme $\quad \mathbb{R}^* \supset H = \{\text{hromadné body posloupnosti } (a_n)\}$.
H má největší i nejmenší prvek:

- když (a_n) není shora omezená, pak je $+\infty \in H$ největším prvkem
- je-li (a_n) shora omezená číslem $c \in \mathbb{R}$, je c horní závorou pro H
- volme $\alpha = \sup(H) \in \mathbb{R}$
- podle vlastnosti suprema a definice množiny H pro každé $k \in \mathbb{N}$ má (a_n) podposloupnost s limitou v intervalu $[\alpha - 1/k, \alpha]$. Z těchto podposloupností pro $k = 1, 2, \ldots$ vybereme vhodné členy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, že $n_1 < n_2 < \ldots$ a pro každé k je $a_{n_k} \in [\alpha - 2/k, \alpha]$
- tím jsme vyrobili podposloupnost, jejíž limita je α. Tedy $\alpha = \sup(H) \in H$ a H má největší prvek.
- podobně pro nejmenší prvek

Limes superior a limes inferior

Definice (Limes superior a limes inferior.)

Definujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min(H) \quad \text{a} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \max(H) .$$

Tyto zkratky znamenají *limes inferior*, nejmenší limita (podposloupnosti), a *limes superior*, největší limita (podposloupnosti). Na rozdíl od limity $\liminf$ a $\limsup$ vždy existují.

Je-li p_n n-té prvočíslo, co můžeme říct o $\limsup_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n)$ a $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n)$? www.menti.com: 4892 7329 Kvíz

Řada a její součet

Řada a její součet

Definice (Řada a její součet)

Nekonečná řada (reálných čísel) je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

kde $(a_n)_{n\geq 1}$ je posloupnost reálných čísel.
Částečný součet řady (n-tý částečný součet) s_n, je součet jejích prvních n členů.
Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) částečných součtů dané řady, mluvíme o *konvergentní řadě* a limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ je jejím *součtem*.
Pokud $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada *divergentní*.

Příklady řad

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

- je divergentní, protože $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Příklady řad

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

- je divergentní, protože $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

- *geomerická řada*
- $q \in \mathbb{R}$ je *kvocient*
- vzorec pro částečný součet ($q \neq 1$):

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Příklady řad

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots$$

- je divergentní, protože $(s_n) = (1,0,1,0,1,\dots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+q^3+\cdots$$

- *geomerická řada*
- $q \in \mathbb{R}$ je *kvocient*
- vzorec pro částečný součet ($q \neq 1$):

$$s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots \quad -1<q<1 \\ & \end{cases}$$

Příklady řad

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots$$

- je divergentní, protože $(s_n) = (1,0,1,0,1,\dots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+q^3+\cdots$$

- *geomerická řada*
- $q \in \mathbb{R}$ je *kvocient*
- vzorec pro částečný součet ($q \neq 1$):

$$s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots \quad -1<q<1 \\ +\infty & \dots \quad q\geq 1 \end{cases}$$

Příklady řad

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots$$

- je divergentní, protože $(s_n) = (1,0,1,0,1,\dots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+q^3+\cdots$$

- *geomerická řada*
- $q \in \mathbb{R}$ je *kvocient*
- vzorec pro částečný součet ($q \neq 1$):

$$s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots \quad -1<q<1 \\ +\infty & \dots \quad q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \dots \quad q \leq -1. \end{cases}$$

Nutná podmínka konvergence

Věta

Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Podmínka není postačující!

Nutná podmínka konvergence

Věta

Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Podmínka není postačující!

Důkaz

Když řada $\sum a_n$ konverguje, pak $lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$. Podle věty o aritmetice limit máme

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = lim_{n\to\infty} s_n - lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0.$$

posunutím indexu o 1 nezměním limitu

Příklady řad

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$, kde $s \in \mathbb{R}$

Pro jejich konvergenci platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ \text{diverguje pro } s \leq 1. \end{cases}$$

Pro $s = 1$ se řada nazývá *harmonická řada*.

Diverguje, ačkoli její prvky konvergují k nule!

Příklady řad

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$, kde $s \in \mathbb{R}$

Pro jejich konvergenci platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ \text{diverguje pro } s \leq 1. \end{cases}$$

Pro $s = 1$ se řada nazývá *harmonická řada*.

Diverguje, ačkoli její prvky konvergují k nule!

Pro některé hodnoty s jsou pro součty této řady známy explicitní vzorce, například

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Srovnávací kritérium

Věta (Srovnávací kritérium)

Uvažujme řady $\sum a_n$ *a* $\sum b_n$ *splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro všechna* n*.*
Jestliže $\sum b_n$ *konverguje, pak také* $\sum a_n$ *konverguje.*
Jestliže $\sum a_n$ *diverguje, pak také* $\sum b_n$ *diverguje.*

Riemannova věta

$\sum a_n$ — $\lim a_n = 0$

$\sum a_{n_1} = \infty$ — a_{n_1} kladné členy

$\sum a_{n_2} = -\infty$ — a_{n_2} záporné členy

$\forall L \in \mathbb{R}^* \ \exists \pi(a_n): \sum \pi(a_n) = L$