Matematická analýza 1 (NMAI054)
11. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

28.dubna 2022

Určitý integrál

- výpočet ploch, objemů, energie a práce a dalších fyzikálních veličin, odhadování součtů ...

Definice

Předpokládejme, že máme dáno $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a,b) *Newtonův integrál*, když má na (a,b) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity

$$F(a^+) = \lim_{x \to a^+} F(x) \quad \text{a} \quad F(b^-) = \lim_{x \to b^-} F(x).$$

Symbolem $[F]_a^b$ označme rozdíl $F(b^-) - F(a^+)$. *Newtonův integrál* funkce f na intervalu (a,b) pak definujeme jako

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Newtonův integrál

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

- Protože každé dvě funkce primitivní k f na (a,b) se liší jen o aditivní konstantu, rozdíl limit $F(b^-) - F(a^+)$ na volbě F nezávisí a definice Newtonova integrálu je korektní.
- Třídu newtonovsky integrovatelných funkcí značíme

$$\mathcal{N}(a,b) = \{f\colon f \text{ má na } (a,b) \text{ Newtonův integrál}\}.$$

- Pokud je integrační proměnná jasná z kontextu, často místo $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ píšeme jen $(N)\int_a^b f$.

Kvíz www.menti.com 5803 3649 Nechť $a < b < c$ jsou tři reálná čísla. Nechť f je funkce, která je newtonovsky integrovatelná na (a,b) i na (b,c). Potom f je také newtonovsky integrovatelná na (a,c) a platí $(N)\int_a^b f + (N)\int_b^c f = (N)\int_a^c f$.

Newtonův integrál a spojitost

Věta

Je-li funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *spojitá, pak* $(N) \int_a^b f(x)\, dx$ *existuje.*

▸ Důkaz

Nechť nám $f: \operatorname{sgn}(x)$ $(-1,0),\ (0,1)$ ✓

$(-1, 1)$ × nemá primitivní funkci v bodě 0

Newtonův integrál a spojitost

Věta

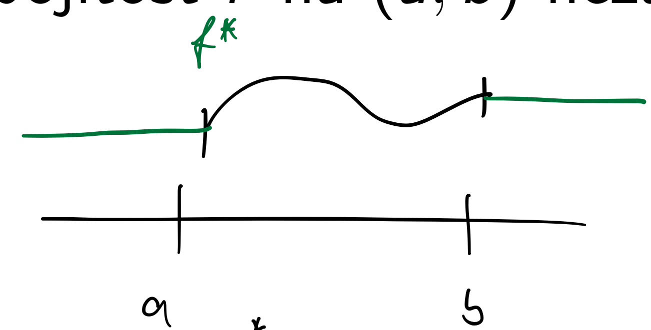
Je-li funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá, pak $(N) \int_a^b f(x)\, dx$ existuje.

Důkaz

takovó funkce má primitivní funkci ?

- potřeba předpokládat spojitost $[a, b]$, spojitost f na (a, b) nezaručuje existenci určitého integrálu

$\mathcal{2}$ f udělám funkci spojitou na $\mathbb{R}$: $f^* = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ f(a) & x < a \\ f(b) & x > b \end{cases}$



f^* má prim. spojitou funkci F

- spojitost na $[a, b]$ ani omezenost není nutná

$$(N)\int_a^b f^* = (N)\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Věta (Per partes pro určitý integrál)

Nechť f a g jsou dvě funkce spojité na $[a, b]$. Nechť mají f a g na (a, b) primitivní funkce F a G, které lze spojitě rozšířit na $[a, b]$. Potom existují oba určité integrály $(N)\int_a^b fG$ a $(N)\int_a^b Fg$ a platí

součin primitivních funkcí v krajních bodech

$$(N)\int_a^b fG = [FG]_a^b - (N)\int_a^b Fg.$$

Důkaz

fG, Fg jsou spojité $\Rightarrow$ dle před. věty $\exists\ (N)\int_a^b fG,\ (N)\int_a^b Fg$.

$L = \int fG$

$P = \int Fg$

$(N)\int_a^b fG = [L]_a^b = [FG - P]_a^b \overset{AL}{=} [FG]_a^b - [P]_a^b$

per partes.

$L = FG - P$

Metody výpočtu Newtonova integrálu

- pokud $a < b$, tak výraz $(N)\int_b^a f$ definujeme jako $-(N)\int_a^b f$ a podobně $[F]_b^a$ položíme rovno $-[F]_a^b$
- $(N)\int_b^b f := 0$ pro libovolné b a f
- *vnitřek* intervalu J = množina vnitřních bodů J, tj. otevřený interval

Věta (Substituce pro určitý integrál)

Nechť $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu (α, β) vlastní derivaci. Označme $J := \varphi((\alpha, \beta)) = \{\varphi(t);\ t \in (\alpha, \beta)\}$. Ze spojitosti φ na $[\alpha, \beta]$ plyne, že J je omezený interval Nechť f je funkce spojitá na J a newtonovsky integrovatelná na vnitřku J. Potom

$$(N)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (N)\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx,$$

speciálně tedy levá i pravá strana existuje.

Kvíz www.menti.com 2579 6946

Metody výpočtu Newtonova integrálu

Nechť $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu (α,β) vlastní derivaci. Označme $J := \varphi((\alpha,\beta)) = \{\varphi(t);\ t \in (\alpha,\beta)\}$. Ze spojitosti φ na $[\alpha,\beta]$ plyne, že J je omezený interval. Nechť f je funkce spojitá na J a newtonovsky integrovatelná na vnitřku J. Potom

$$(N)\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (N)\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx,$$

speciálně tedy levá i pravá strana existuje.

- na pravé straně rovnosti nemusí integrační meze splňovat $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$
- interval J může být otevřený, uzavřený, nebo polootevřený
- nutno ověřit předpoklady pro f na celém intervalu J, který může být větší než interval ohraničený hodnotami $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$
- není nutné aby $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$ patřily do J
- pokud J obsahuje krajní body, je v nich třeba ověřit (jednostrannou)

Příklady

Není nutné, aby $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$ patřily do J.

$$x = \sin t = \varphi(t)$$

$$(N)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin t}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

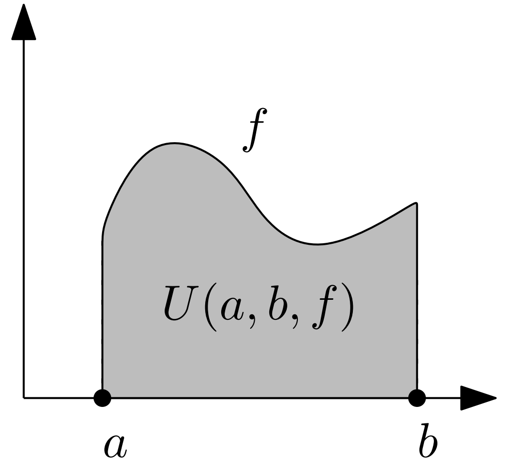
správné použití věty ač f není def $x=1$

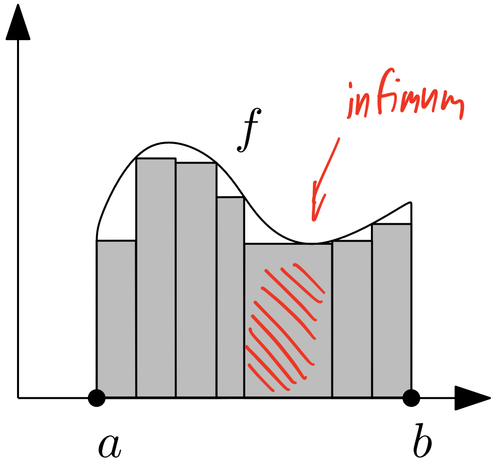
Nelze:

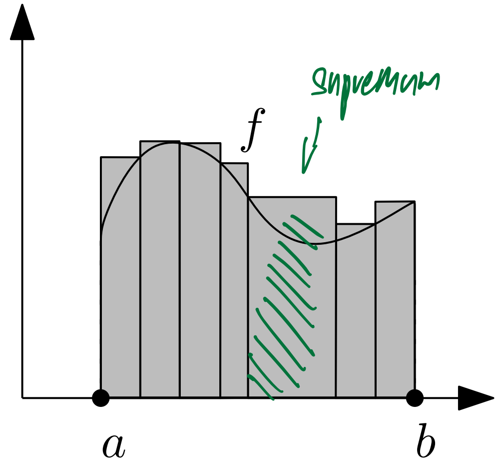
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin t}}\,dt \neq \int_{0}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

protože f není spojitá $x=1$

Riemannův integrál — „plocha pod grafem funkce“







Riemanna suma

Definice (Riemanna suma)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ jsou dvě reálná čísla. Konečná $(k+1)$-tice bodů $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ z intervalu $[a, b]$ je jeho *dělením*, pokud

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b.$$

Tyto body dělí interval $[a, b]$ na intervaly $I_i = [a_i, a_{i+1}]$. Délku intervalu označíme pomocí absolutní hodnoty: $|I_i| = a_{i+1} - a_i$ a $|[a, b]| = b - a$. Pro funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ a dělení $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ definujeme *dolní*, respektive *horní, Riemannovu sumu* jako

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i, \quad \text{respektive} \quad S(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i,$$

kde $m_i = \inf\{f(x);\ x \in I_i\}$ a $M_i = \sup\{f(x);\ x \in I_i\}$.
Tyto součty jsou vždy definované, $s(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a $S(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Riemannův integrál

Definice (Horní a dolní Riemannův integrál)

Dolní, respektive *horní, Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$ definujeme jako

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f, D)\colon D \text{ je dělení } [a, b]\},$$

respektive

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f, D)\colon D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

Tyto výrazy jsou vždy definované a $\underline{\int_a^b} f, \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Riemannův integrál

Definice (Riemannův integrál)

Řekneme, že funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a,b]$ *Riemannův integrál*, případně že je *riemannovsky integrovatelná*, pokud

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

Tuto společnou konečnou hodnotu, když existuje, značíme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

a nazýváme Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a,b]$. Třídu všech riemannovsky integrovatelných funkcí označujeme

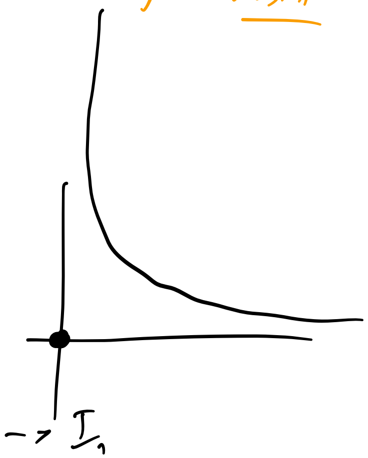
$$\mathcal{R}[a,b] := \{f\colon f \text{ je definovaná a riemannovsky integrovatelná na } [a,b]\}.$$

Vlastnosti Riemannova integrálu a sum

ať vezmu jakkoliv malý interval, funkce tam bude $+\infty$ jako nevlastní

- neomezená funkce není Riemannovsky integrovatelná

$$f = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{není RS na } [0,1] : \forall D \;\; S(f,D) = +\infty)$$



$\sup I_1(f) = +\infty$

$\to I_1$

- dolní Riemannova suma je menší nebo rovna horní Riemannově sumě téhož dělení – platí i pro libovolné dělení
- Riemannův integrál (pokud existuje) lze shora odhadnout horní a zdola dolní Riemannovou sumou

Nechť mám D a zjemnění D' : $\quad s(f,D) \le s(f,D')$ dolní riemann

$S(f,D) \ge S(f,D')$ horní riemann

$$s(f,D) \le \int \le S(f,D)$$

$D'' = D_1 \cup D_2 \qquad s(f,D_1) \le s(f,D'') \le S(f,D_2)$