Matematická analýza 1 (NMAI054)
10. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

21.dubna 2022

www.menti.com 1843 1507 Otázky

Primitivní funkce = neurčitý integrál

„Jak z derivace zrekonstruovat původní funkci?“

Definice

Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Pokud má funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na (a,b) derivaci a ta se rovná $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, řekneme, že *F je na intervalu (a,b) primitivní funkcí k funkci f*.

Jednoznačnost primitivní funkce

Věta (Primitivní funkce je jednoznačná až na konstantu)

Je-li $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$ na (a,b), je pro každé $c \in \mathbb{R}$ funkce $F(x) + c$ také primitivní k $f(x)$ na (a,b). Naopak, jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní k $f(x)$ na (a,b), existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $F(x) - G(x) = c$ pro každé $x \in (a,b)$.

- narozdíl od derivace tedy primitivní funkce **není** určena jednoznačně
- nedává smysl mluvit o primitivní funkci v bodě

www.menti.com 8988 6876 ▸ Kvíz

$F' = f$

▸ Důkaz

$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$

$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0 \to F - G$ je konst. funkce

Primitivní funkce

Množina funkcí primitivních k $f(x)$ se označuje symbolem integrálu

$$\int f(x)\,dx.$$

Fakt, že $F(x)$ je primitivní funkcí k $f(x)$ značíme jako

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

kde c je libovolná reálná konstanta.

tohle není úplně správně

$= \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c \quad \text{na } \mathbb{R}$$

Primitivní funkce a spojitost

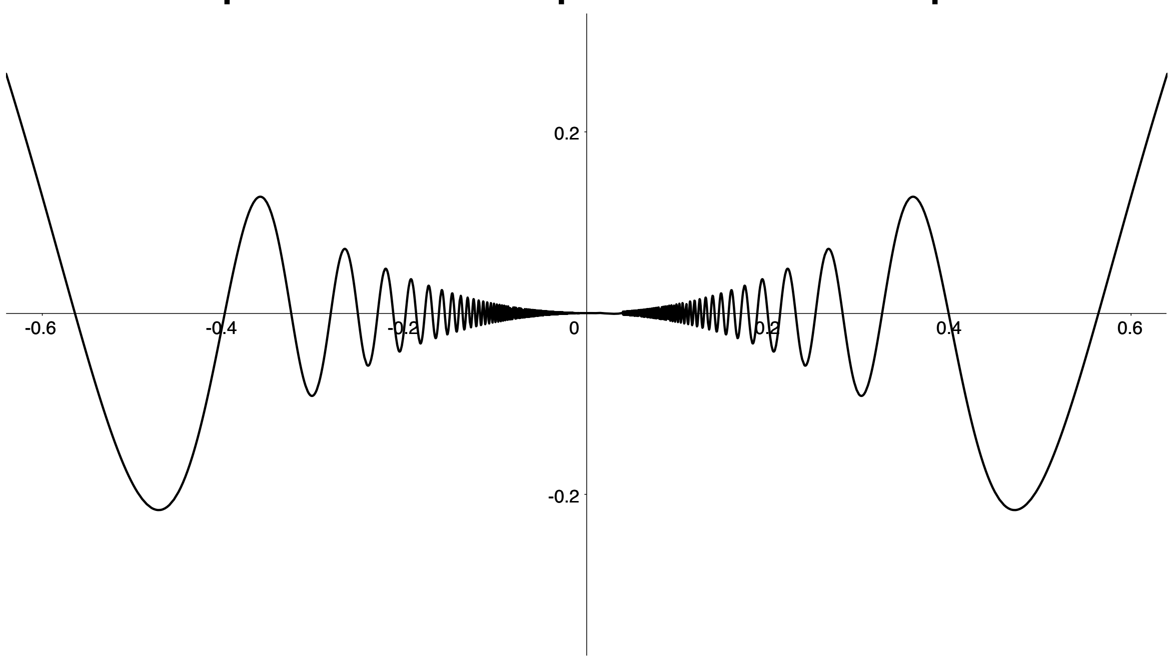
- pokud existuje, je primitivní funkce vždy spojitá (na odpovídajícím intervalu) podle Věty o derivaci a spojitosti (diferencovatelná funkce musí být spojitá)
- ne vždy ale primitivní funkce existuje

$\mathrm{sgn}(x)$, při: F je p. f k $\mathrm{sgn}(x)$: $F'(0) = \mathrm{sgn}(0) = 0$

F je ale spojitá $\quad \lim_{x \to 0^+} F'(x) = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1$

- spojitost není nutnou podmínkou pro existenci primitivní funkce

$$F = \begin{cases} x \sin(1/x^2) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$f = F'$ není spoj v nule

Primitivní funkce, spojitost, darbouxovskost

Věta (Spojitá funkce má primitivní funkci) postačující podmínka

Je-li I neprázdný otevřený interval a funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je na I spojitá, pak má f na I primitivní funkci.

Věta (Funkce s primitivní funkcí má Darbouxovu vlastnost) nutná podmínka

Má-li funkce $f : I \to \mathbb{R}$, kde $I = (a, b)$ je otevřený interval, na I primitivní funkci, je obraz $f(I)$ též interval. Funkce f má tedy Darbouxovu vlastnost.

www.menti.com 71 59 12 ▸ Kvíz

▸ Důkaz

$f \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ spoj. v 0, není Darb

Není primitivní funkci

$F = \int f$ na I, vezmeme $c: f(x_1) < c < f(x_2)$, kde $x_1, x_2 \in I$, předpokl. $x_1 < x_2$ (v opačném případě prohodíme max/min)

Uvažme $H(x) = F(x) - c \cdot x$ na $[x_1, x_2]$

F je spojitá $\Rightarrow$ H je spojitá $\Rightarrow$ H nabývá minima na $[x_1, x_2]$ v bodě x^*

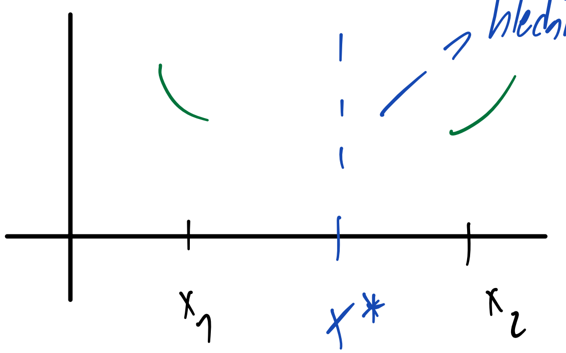
tady tedy není minimum

$H'(x) = f(x) - c$

max x^* je krajní bod x $\to H'(x_1) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in (x_1, x_1 + \delta) \Rightarrow H(x) < H(x_1)$

$\searrow H'(x_2) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in (x_2 - \delta, x_2) \Rightarrow H(x) < H(x_2)$

$H'(x^*) = 0$



hledáme nulovou derivaci

v x^*: $H'(x^*) = 0$

$f(x^*) = c \Rightarrow f(x^*) - c$

tady taky není

Počítání primitivních funkcí

- neexistují univerzální vzorečky :(
- existují funkce, které sice primitivní funkci mají, ale *není elementární*, tj. nelze ji vyjádřit pomocí dosud zavedených funkcí (jako konečnou kombinaci polynomů, exponenciály, goniometrických funkcí a funkcí k nim inverzních): např. $\frac{1}{\ln x}$, $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\sqrt{1-x^4}$, $\sin(x^2)$

Počítání primitivních funkcí

- neexistují univerzální vzorečky :(
- existují funkce, které sice primitivní funkci mají, ale *není elementární*, tj. nelze ji vyjádřit pomocí dosud zavedených funkcí (jako konečnou kombinaci polynomů, exponenciály, goniometrických funkcí a funkcí k nim inverzních): např. $\frac{1}{\ln x}$, $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\sqrt{1-x^4}$, $\sin(x^2)$

Věta

Nechť F je primitivní funkcí k f a G je primitivní ke g na intervalu I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak je funkce $\alpha F + \beta G$ na intervalu I primitivní k $\alpha f + \beta g$.

$[\alpha F + \beta G]' = \alpha f + \beta g$ $\boxtimes$

Substituce

Věta (O substituci)

Buďte dány funkce $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, přičemž φ má na (α,β) vlastní derivaci. Nechť je funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) primitivní k funkci f. Pak na intervalu (α,β) platí, že

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + c.$$

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \boxtimes$$

<u>Příklady</u>

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ Chceme: $\int f(ax+b)\,dx$

$$= \int f(ax+b) \frac{(ax+b)'}{(ax+b)'}\,dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) \cdot (ax+b)'\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

Integrace per partes

Věta (Integrace per partes)

Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu (a, b) a funkce F a G jsou k nim na (a, b) primitivní. Potom i funkce fG a Fg mají na (a, b) primitivní funkce a na (a, b) platí identita

Proč mají primitivní f? Protože jsou spojité!

$$\int f(x)G(x)\,dx + \int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) + c,$$

tj. součet funkce primitivní k fG a funkce primitivní k Fg je až na aditivní konstantu roven funkci FG.

Důkaz

Leibniz: $[F(x)\,G(x)]' = F(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot G(x)$

$$C + F(x)\cdot G(x) = \int F(x)g(x) + f(x)\,G(x)\,dx = \int F(x)g(x)\,dx + \int f(x)\,G(x)\,dx$$

Příklad integrace per partes

Chceme formát: $\int fG = FG - \int Fg$

$$\int e^x \sin x \, dx,$$

$$\overset{\text{p.p.}}{=} e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

$$\overset{\text{p.p}}{=} e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x (+\sin x)\, dx \right)$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$$

Příklad integrace per partes

$$// \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \cdot dx$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

$$I_1 = \operatorname{arctan} x + c$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{x'}{(1+x^2)^n}$$

$$I_n \overset{P.P}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx$$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^n}}_{I_n} - \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}_{I_{n+1}}\, dx$$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right) \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n(1+x^2)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n$$

Integrace racionálních funkcí

Definice

Racionální funkce je funkce, kterou lze vyjádřit jako podíl dvou polynomů (přičemž polynom ve jmenovateli není identicky nulový).

Věta

Primitivní funkci každé racionální funkce lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, konkrétně racionálních funkcí, logaritmu a arkustangens.

- racionální funkci lze vždy rozložit na takzvané *parciální zlomky*, a tím hledání primitivní funkce racionální funkce víceméně zredukovat na výpočet primitivních funkcí racionálních funkcí v následujícím tvaru:

$$\frac{1}{(x-c)^k} \qquad k \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R} \qquad \text{a}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^k} \qquad k \in \mathbb{N}.$$