Věta: Rolleova: Nechť $a < b \in \mathbb{R}$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ s $f(a) = f(b)$ je spojitá funkce, která má v každém bodu intervalu (a,b) vlastní či nevlastní derivaci.

Potom:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$$

Když je f konstantní, platí to triviálně.

Nechť f není konstantní $f(x) > f(a) = f(b)$ pro nějaké $x \in (a,b)$, případ obrácené nerovnosti funguje stejně.

Podle principu minima a maxima funkce f nabývá v nějakém $c \in [a,b]$ maxima.

Patrně $c \in (a,b)$. Podle předpokladu o derivacích a větě (přízrak extrému) $f'(c) = 0$.

Věta Lagrangeova: Nechť $a < b \in \mathbb{R}$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spoj. funkce, která má v každém bodu intervalu vlastní/nevlastní derivaci.

Potom:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Uvažme $g(x) := f(x) - (x-a) \cdot \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Splňuje podmínky Rolleovy věty, zejména $g(a) = g(b) = f(a)$, takže $0 = g'(c) = f'(c) - (f(b) - f(a))/(b-a)$

Věta Cauchyova: Nechť $a < b \in \mathbb{R}$ a $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ s $g(b) \neq g(a)$ jsou spoj. funkce, které mají na celém intervalu (a,b) derivaci, pro f i nevlastní, pro g pouze vlastní.

Potom:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$

Uvažme $h(x) := f(x) - (g(x) - g(a)) \cdot \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} : [a,b] \to \mathbb{R}$

Splňuje předpoklad Rolleovy věty; $h(a) = h(b) = f(a)$, takže

$0 = h'(c) = f'(c) - g'(c) \cdot (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$ pro $c \in (a,b)$.

Vnitřek množiny $M \subset \mathbb{R} := M^\circ := \{ a \in M \mid \exists \delta : U(a,\delta) \subset M \}$, tedy jde o otevřený interval vynecháním krajových bodů.

Věta Derivace a monotonie: Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: I \to \mathbb{R}$ je spoj. funkce, která má v každém bodě I° vlastní či nevlastní derivaci.
Pak platí následující:

1) $f' \geq 0$ (≤ 0) na $I^\circ \Rightarrow f$ je na I neklesající (nerostoucí)
2) $f' > 0$ (< 0) na $I^\circ \Rightarrow f$ je na I rostoucí (klesající)

Nechť je $f' < 0$ na I° a $x < y \in I$. Podle Lagrangeovy věty:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) < 0 \quad \text{pro } z \in (x, y) \subset I^\circ. \text{ Protože } y - x > 0,$$

je čitatel záporný a f na I klesá. Ostatní možnosti fungují stejně.

Tvrzení Derivace a monotonie II: Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce a jednostranné derivace mohou být nevlastní.

Platí následující:

1) Když je a levý limitní bod M a $f'_-(a) < 0$ (>0), pak
$$\exists \delta: f[P^-(a,\delta) \cap M] > \{f(a)\} \quad (< \{f(a)\})$$
2) Když je a pravý limitní bod M a $f'_+(a) < 0$ (>0), pak
$$\exists \delta: f[P^+(a,\delta) \cap M] < \{f(a)\} \quad (> \{f(a)\})$$

Tvrzení Rozšiřování derivací: Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$, $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce s vl. derivací na intervalu (a,b) a $\lim_{x \to a} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*$.
Potom i $f'_+(a) = L$.

Nechť je dáno ε. $\exists \delta \leq b - a: x \in P^+(a,\delta) \Rightarrow f'(x) \in U(L,\varepsilon)$.

Nechť $x \in P^+(a,\delta)$ je lib. Podle Lagrangeovy věty $\exists y \in (a,x) \subset P^+(a,\delta)$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(y) \in U(L,\varepsilon)$$

tedy $f'_+(a) = L$

Věta l'Hospitalovo pravidlo: $A \in \mathbb{R}$, pro nějaké δ jsou $f, g: P^+(A,\delta) \to \mathbb{R}$ funkce mající na $P^+(A,\delta)$ vlastní derivace, přičemž $g' \neq 0$ na $P^+(A,\delta)$ a platí, že:

1) $\lim\limits_{x \to A} f(x) = \lim\limits_{x \to A} g(x) = 0$ nebo

2) $\lim\limits_{x \to A} g(x) = \pm\infty$, potom:

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to A} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$ pokud poslední limita existuje.

Derivace vyšších řádů $(f^{(n)}(x))$ Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná otevřená množina a $f = f(x): M \to \mathbb{R}$ je funkce. Pro $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ definujeme induktivně konečnou či nekonečnou posloupnost fcí $f^{(n)}(x): M \to \mathbb{R}$

1) Na začátku $f^0(x) = f(x)$

2) Pro $\forall n > 0$, když je $f^{n-1}(x)$ definovaná a má v každém bodě $a \in M$ vlastní derivaci, pro $\forall a \in M$ definujeme hodnotu n-té funkce jako:

$$f^n(a) := (f^{n-1}(x))'(a).$$

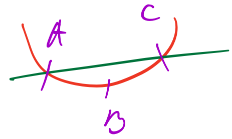
Tvrzení f'' a extrémy: Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, kde M je otevřená množina, $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce, existuje vlastní $f': M \to \mathbb{R}$ s $f'(a) = 0$ a existuje $f''(a) \in \mathbb{R}^*$, i nevlastní. Pak platí následující:

1) $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ má v a ostré lok. minimum

2) $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ má v a ostré lok. maximum

Konvexní a konkávní funkce: Nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Je konvexní, pokud $\forall a < b < c$ v I platí:

$$(b, f(b)) \le h(a, f(a), c, f(c)).$$



Pokud je nerovnost ostrá, jde o ryzí konvexnost.

Věta $\exists$ jednostranné derivace: Každá konvexní (konkávní) funkce $f: I \to \mathbb{R}$ def. na otevřeném int. $I \subset \mathbb{R}$ má vlastní jednostranné derivace $f'_-, f'_+: I \to \mathbb{R}$ a ty jsou neklesající (nerostoucí).

Věta *Konvexita a konkavita a f'':* Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a spoj. fce $f: I \to \mathbb{R}$ má v každém $b \in I^o$ druhou derivaci $f''(b) \in \mathbb{R}^*$, i nevlastní. Pak platí následující:

1) $f'' \geq 0$ (≤ 0) na I^o $\Rightarrow$ f je na I konvexní (konkávní)

2) $f'' > 0$ (< 0) na I^o $\Rightarrow$ f je na I ryze konvexní (konkávní)

Inflexe Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je OLB množiny M, $f: M \to \mathbb{R}$ a l je tečna ke grafu G_f v $(a, f(a))$.

Bod $(a, f(a))$ je *inflexní* bod grafu funkce f, pokud $\exists \delta: \forall x \in P^-(a, \delta) \cap M$ a $\forall x' \in P^+(a, \delta) \cap M$ je:

$(x, f(x)) \leq l$ a $(x', f(x')) \geq l$ (případně opačné nerovnosti.)

Tvrzení *Inflexe není:* Nechť $f: U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ a existuje $f''(a) \in \mathbb{R}^* \neq 0$.

Pak $(a, f(a))$ není inflexním bodem grafu funkce f.

Věta *Inflexe je:* Nechť $f: U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, $\forall b \in U(a, \delta)$ $\exists$ vlastní $f''(b)$, $f''(a) = 0$,

$f''(a) \geq 0$ na $P^-(a, \delta)$, $f''(a) \leq 0$ na $P^+(a, \delta)$ nebo nerovnosti obráceně.

Pak $(a, f(a))$ je inflexním bodem grafu funkce f.

Svislá asymptota: Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ je levý limitní bod M a $f: M \to \mathbb{R}$.

Pokud $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, nazveme přímku levou svislou asymptotou funkce f.

Asymptoty v nekonečnu: Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $+\infty$ je limitní bod množiny M, $s, b \in \mathbb{R}$ a $f: M \to \mathbb{R}$.

Když $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - sx - b) = 0$, pak přímku $y = sx + b$ nazvu asymptotou funkce f v $+\infty$.