Tvrzení **Heineho definice:** Funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in M \subset \mathbb{R}$, právě když

$$\forall (a_n) \subset M: \lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = f(a)$$

Pro limitní body dokázáno v tvrzení „o spojitosti v (limitním) bodě", pro izolované body dokázáno v tvrzení „o spojitosti v iz. bodě", oboje z minulé přednášky.

Pak však $\lim a_n = a$ znamená, že $a_n = a$ $\forall n \geq n_0$. Tedy i $f(a_n) = f(a)$

Spojitost na množině: Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ a $f: M \to \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá (na M), je-li spojitá $\forall$ bodě množiny M.

Husté množiny: Nechť je $N \subset M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že množina N je hustá v množině M, když $\forall a \in M\ \forall \delta: U(a,\delta) \cap N \neq \emptyset$.

Tvrzení: **Hustota a spojitost:** Nechť $N \subset M \subset \mathbb{R}$, množina N je hustá v M a $f,g: M \to \mathbb{R}$ jsou takové dvě spoj. funkce, že $\forall x \in N: f(x) = g(x)$. Potom $f = g$, takže se funkce úplně shodují.

Nechť $y \in M$ je libovolný bod a $(a_n) \subset N$ je posloupnost s $\lim a_n = y$.

Pak $f(y) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = \lim g(a_n) = g(\lim a_n) = g(y)$

Tohle plyne z rovnosti f a g na N.

Dohoda: $A \subset B, C$ jsou množiny a $f: B \to C$ je funkce. Pak zúžení na A je funkce $f|A: A \to C$

$$\forall x \in A: (f|A)(x) := f(x)$$

Věta **H. Blumberg:** Pro každou funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existuje taková množina $M \subset \mathbb{R}$ hustá v $\mathbb{R}$, že restrikce $f|M$ je spojitá funkce.

Věta **Cantor-Bernsteinova:** Když existují prostá zobrazení $f: X \to Y$ a $g: Y \to X$, pak existuje bijekce $h: X \to Y$. Tu lze navíc zvolit tak, že $\forall x \in X$ je $h(x) = f(x)$ nebo $h(x) = g^{-1}(x)$

Kolik je spojitých funkcí $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Stejně jako je reálných čísel!

Věta **Počet spojitých funkcí:** $\exists$ bijekce $h: \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$

Pro $M \subset \mathbb{R}$: $C(M) := \{f: M \to \mathbb{R} \mid f \text{ je spojitá}\}$

Stačí najít injekce $f: \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$ a $g: C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Věta O nabývání mezihodnot: Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $f(a)<c<f(b)$ nebo $f(a)>c>f(b)$. Pak

$$\exists d \in (a,b): f(d)=c$$

Předpokládejme zmíněnou nerovnost. Nechť $A := \{x \in \langle a,b\rangle \mid f(x)<c\}$ a $d := \sup(A) \in \langle a,b\rangle$.

Číslo d je korektně definované, protože množina A je neprázdná a shora omezená.

Ukážeme, že $f(d)<c$, tak $f(d)>c$ vede ke sporu, tedy platí $f(d)=c$.

Ze spojitosti funkce f v a and v b plyne, že $d \in (a,b)$. Nechť $f(d)<c$.

Ze spojitosti funkce f v d plyne, že $\exists \delta$, že $x \in U(d,\delta) \cap \langle a,b\rangle \Rightarrow f(x)<c$.

Pak ale A obsahuje větší čísla než d, tedy spor s tím, že d je horní mez množiny.

Nechť $f(d)>c$. Ze spojitosti f v d plyne, že $\exists \delta$, že $x \in U(d,\delta) \cap \langle a,b\rangle \Rightarrow f(x)>c$.

Pak ale $\forall x \in \langle a,d)$ dostatečně blízko d leží mimo A, tedy spor s tím, že d je nejmenší horní mez množiny A.

Důsledek Spojitý obraz intervalu: Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: I \to \mathbb{R}$ je spoj. funkce.

Pak $f[I] = \{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}$ je též interval.

Důsledek Spojitost a prostota na intervalu: Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá prostá funkce. Potom f je buď rostoucí nebo klesající.

Kdyby nebyla rostoucí ani klesající, musí platit pro $a<b<c$, že

$f(a)<f(b)>f(c)$ nebo $f(a)>f(b)<f(c)$. V případě 1 se každé d splňující

$f(a), f(c) < d < f(b)$ nabývá hodnoty $d = f(x) = f(y)$ pro $x \in (a,b)$ a $y \in (b,c)$, což

je spor s prostotou funkce. Druhý případ je obdobný.

→ věta o nabývání mezihodnot

Kompaktní množina: Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, když $\forall (a_n) \subset M$ má konvergentní podposl. (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} \in M$.

Věta Princip minima a maxima: Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná kompaktní množina a $f: M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existují body $a,b \in M$ t.ž.:

$\forall x \in M: f(a) \le f(x) \le f(b)$. Tedy f nabývá na a minimum, na b maximum.

Dokážeme existenci maxima funkce f. Protože $f[M] \neq \emptyset$ a ukážeme, že je shora omezená. Kdyby nebyla, existovala by posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = +\infty$. Podle kompaktnosti M máme konvergentní podposl. (a_{m_n}) s $a := \lim a_{m_n} \in M$. Pak ale i $\lim a_{m_n} = +\infty$. To je ale spor s $\lim (a_{m_n}) = f(a)$. Lze tedy def. $s := \sup(f[M]) \in \mathbb{R}$ a podle definice sup. existuje $(a_n) \subset M$ s $\lim f(a_n) = s$. Díky kompaktnosti M má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $b := \lim a_{m_n} \in M$. Pak $\lim f(a_{m_n}) = f(b) = s$. --> Heineho definice

Protože s je horní mez množiny $f[M]$, je $f(b) \geq f(x)$ $\forall x \in M$.

Globální a lokální: Nechť je $a \in M \subset \mathbb{R}$ a nechť $f: M \to \mathbb{R}$. Funkce f má v a na M globální maximum (minimum), když:

$$\forall x \in M: f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

lokální maximum (minimum), když

$$\exists \delta\ \forall x \in U(a,\delta) \cap M: f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Stejně tak existuje ostré maximum, pokud jde o ostré nerovnosti.

Omezená množina: $M \subset \mathbb{R}$ je omezená: $\exists c\ \forall a \in M: |a| < c$.

Je uzavřená, pokud $\forall (a_n) \subset M: \lim a_n = a \Rightarrow a \in M$.

Je otevřená, pokud $\forall a \in M\ \exists \delta: U(a,\delta) \subset M$. --> tedy že do té množiny patří i body „okolo"

Tvrzení. Uzavřené množiny: Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená $\Leftrightarrow$ množina $\mathbb{R} \setminus M$ je otevřená.

$\mathbb{R} \setminus M$ není otevřená $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \setminus M\ \forall \delta: U(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$.

Ekvivalentně existuje bod $a \in \mathbb{R} \setminus M$ a posl. $(a_n) \subset M: \lim a_n = a$. Ekvivalentně, M není uzavřená.

Tvrzení Struktura otevřené množiny: Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená $\Leftrightarrow \exists$ systém otevřených intervalů $\{I_j, j \in X\}$, že indexová množina X je nejvýše spočetná, intervaly I_j jsou vzájemně disjunktní a $\bigcup_{j \in I_j} I_j = M$

Uzavřená množina je tak doplňkem otevřené množiny. Čili jde o sjednocení „mezer" mezi takovými intervaly. Pokud $|X| = n \in \mathbb{N}$, pak těchto mezer je nejvýše $n+1$.

Věta *Kompaktnost množiny:* Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní $\iff$ M je omezená a uzavřená.

Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ omezená a uzavřená a $(a_n) \subset M$ je lib. posl. Protože (a_n) je omezená, má podle Bolzano-Weierstrasse konvergentní podposl. (a_{m_n}) s $a := \lim a_{m_n} \in \mathbb{R}$.

Protože $a \in M$ (M je uzavřená) $\Rightarrow$ M je kompaktní.

Nechť M není omezená. Sestrojíme $(a_n) \subset M$ t.ž. $|a_m - a_n| > 1 \ \forall m,n: n \neq m$. Takovou vlastnost by sdílela i každá podposloupnost, tedy by žádná nebyla konvergentní, tudíž by M nebylo kompaktní. První $a_1 \in M$ zvolíme náhodně, další nechť jsou již nadefinovány s podmínkou výše. Protože M není omezená, $\exists\, a_{n+1} \in M$ t.ž. $|a_{n+1}| > 1 + \max(|a_1|, \dots |a_n|)$, pak potrvně $|a_{n+1} - a_i| > 1 \ \forall i$. Takto definujeme celou (a_n).

Nechť není $M \subset \mathbb{R}$ uzavřená. Pak $\exists$ konvergentní posl. $(a_n) \subset M$: $a := \lim a_n \in \mathbb{R} \setminus M$. Stejnou limitu a má i každá její podposl., která tedy nemá limitu v M. Tedy M není kompaktní.

$\Rightarrow$ protože není uzavřená.

Tvrzení *Aritmetika spojitosti:* Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ a $f, g: M \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Potom součtová i součinová funkce je spojitá.

$$f+g,\ f \cdot g : M \to \mathbb{R}, \quad f/g : M \to \mathbb{R}$$

Důkaz jen pro podíl:

Nechť $a \in M$ je lib. bod a $(a_n) \subset M$ je lib. posl. s $\lim a_n = a$.

Podle Heineho definice je $\lim f(a_n) = f(a)$, $\lim g(a_n) = g(a)$.

Podle věty o aritmetice posl. je:

$$\lim (f/g)(a_n) = \lim f(a_n)/g(a_n) = \lim f(a_n)/\lim g(a_n) = f(a_n)/g(a_n) = f(a)/g(a).$$

Podle Heineho definice je f/g spojitá v bodě a.

Racionální funkce $r(x)$: je podíl dvou polynomů, tedy funkce ve tvaru:

$$r(x): \frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0} : M \to \mathbb{R}, \text{ kde } a_i, b_i \in \mathbb{R},\ m,n \in \mathbb{N}_0,\ a_m b_n \neq 0,$$

v čitateli povolujeme identický nulový polynom.

Def. obor M je: $\mathbb{R} \setminus \{z_1, z_2, \dots z_k\}$, kde $z_i \in \mathbb{R}$ je reálný kořen polynomu ve jmenovateli.

Důsledek Spojitost rac. funkce: Každá racionální funkce je spojitá ve svém def. oboru

Vyjdeme z toho, že lineární identická $f(x) = x$ i konstantní $f(x) = c \in \mathbb{R}$ je spojitá na $\mathbb{R}$, pak opakovaným použitím předchozího plyne spojitost racionální funkce.

Tvrzení Spojitost a skládání: Nechť $M, N \subset \mathbb{R}$ a $g: M \to N$ a $f: N \to \mathbb{R}$ spojité.
Pak i složená funkce $f(g): M \to \mathbb{R}$ je spojitá.

Nechť $a \in M$ a $(a_n) \subset M$ je lib. posl. s $\lim a_n = a$. Podle Heineho def. je $\lim g(a_n) = g(a)$ a také $\lim f(g)(a_n) = \lim (f(g(a_n))) = f(g(a)) = f(g)(a)$.
Heineho definice zaručuje, že je $f(g)$ spojitá v bodě a.

Věta Spojitost inverzu: Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $f: M \to \mathbb{R}$ je spojitá prostá funkce.
Inverz $f^{-1}: f[M] \to M$ je spojitý, pokud:

1) M je kompaktní
2) M je interval

1) Nechť M je kompaktní, $b \in f[M]$, $(b_n) \subset f[M]$: $\lim b_n = b$.
Položíme $a := f^{-1}(b) \in M$ a $a_n := f^{-1}(b_n) \in M$. Dokážeme, že $\lim a_n = a$.
Nechť (a_{m_n}) je podposl. $(a_n) \subset M$ s $\lim a_{m_n} = L \in \mathbb{R}^*$. Ale $L \in M$, protože M je uzavřená, omezená.
Podle Heineho definice je $\lim f(a_{m_n}) = f(L) = b$, protože (a_{m_n}) je podposloupnost (b_n).
Vzhledem k prostotě f se $L = a$. Tím pádem (a_n) nemá dvě podposl. s rozdílnými limitami, tudíž $\lim a_n = a$. $\to$ Tvrzení „Spojitost a prostota na intervalu"

2) Nechť M je interval. Pak f musí být rostoucí nebo klesající. Nechť je klesající. (Rostoucí je obdobný).
Podle (spojitost obrazu intervalu) je $f[M]$ také interval. Nechť $b \in f[M]$ a nechť je dáno ε.
Ukážeme, že f^{-1} je zprava spojitá v b. Triviální to platí, pokud b je pravý konec intervalu.
Nechť b není pravý konec intervalu. Protože f^{-1} je klesající, $a := f^{-1}(b) \in M$ není pravý konec intervalu M a můžeme předpokládat, že ε je tak malé, že $\langle a-\varepsilon, a \rangle \subset M$.
Položíme $\delta := f(a-\varepsilon) - f(a) = f(a-\varepsilon) - b$. Protože f^{-1} je klesající, posílá $\langle b, b+\varepsilon \rangle \subset f[M]$ do $\langle a-\varepsilon, a \rangle \subset M$.
Tedy $f^{-1}[U^+(b,\delta) \cap f[M]] \subset U(f^{-1}(b), \varepsilon) = U(a, \varepsilon)$ a f^{-1} je zprava spojitá v b.
Zleva se dokáže stejně, tudíž je spojitá v bodě.