Jednostranní okolí: Pro $\varepsilon \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$ definujeme levé (pravé) okolí bodu b jako:

$U^-(b,\varepsilon) := (b-\varepsilon, b\rangle$, $U^+(b,\varepsilon) := \langle b, b+\varepsilon)$. Podobně prstencové okolí:

$P^-(b,\varepsilon) := (b-\varepsilon, b)$, $P^+(b,\varepsilon)$.

Jednostranný limitní bod: Bod $b \in \mathbb{R}$ je levým (pravým) limitním bodem množiny $M \subset \mathbb{R}$,

pokud: $\forall \delta > 0 : P^-(b,\delta) \cap M \neq \emptyset$ levý

$\forall \delta > 0 : P^+(b,\delta) \cap M \neq \emptyset$ pravý

Jednostranné limity: Nechť $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, a je levý (pravý) lim. bod. množiny M a nechť

$f : M \to \mathbb{R}$. Pak píšeme $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ a říkáme, že

funkce má v bodě a limitu zleva rovnou L, pokud:

$$\forall \varepsilon \exists \delta : f[P^-(a,\delta) \cap M] \subset U(L,\varepsilon)$$

Vždy platí: $\lim\limits_{x \to a} = L \iff \lim\limits_{x \to a^\pm} = L$ $\Rightarrow$ Dobře se dá tedy ověřit existence limity.

Spojitost funkce v bodě: Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v bodě a,

pokud:

Spojitost zleva zprava platí pro $U^\pm$

$$\forall \varepsilon \exists \delta : f[U(a,\delta) \cap M] \subset U(f(a),\varepsilon).$$

Oproti limitě se L nahradilo za $f(a)$ a $P(a,\delta)$ se nahradilo $U(a,\delta)$

$\Rightarrow$ Tedy že ať zvolím jakékoli okolí, vždy budou hodnoty v okolí toho bodu a patřit do okolí bodu $f(a)$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon \exists \delta : x \in M \wedge |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Jinak je f v bodě a nespojitá. Například $\operatorname{sgn}(x)$ je nespojitá v 0.

Tvrzení **O spojitosti v bodě**: Nechť je $b \in M \subset \mathbb{R}$, b je limitní bod množiny M a je dána funkce $f : M \to \mathbb{R}$. Následující tři tvrzení jsou navzájem ekvivalentní.

1) funkce f je spojitá v b.

2) $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$

3) $\forall (a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$: $\lim f(a_n) = f(b)$

$1 \Rightarrow 2$: Nechť je f spojitá a je dáno ε. Tedy $\exists \delta$ t.ž. $f[U(b,\delta) \cap M] \subset U(f(b), \varepsilon)$.
Tím pádem i $f[P(b,\delta) \cap M] \subset U(f(b), \varepsilon)$, tedy podle def. limity

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b).$$

$2 \Rightarrow 3$: Nechť $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$, že je dána posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ a je dáno ε.
Tedy podle definice lim. fun. $\exists \delta$ t.ž. $f[P(b,\delta) \cap M] \subset U(f(b), \varepsilon)$
Vezmeme takové n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(b,\delta)$. Odtud plyne, že
$n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(f(b), \varepsilon)$: Buď $a_n \neq b$, tedy použijeme inkluzi,
nebo $a_n = b$, pak ale $f(a_n) = f(b) \in U(f(b), \varepsilon)$. Proto $\lim f(a_n) = f(b)$

$3 \Rightarrow 1$ $(!1 \Rightarrow !3)$ Předpokládejme, že f není spojitá. Tedy $\exists \varepsilon$ t.ž. $\forall \delta \; \exists a = a(\delta) \in U(b,\delta) \cap M$,
že $f(a) \notin U(f(b), \varepsilon)$. Pro $\forall n$ vybereme nějaké $a_n = a(1/n)$ a
dostáváme posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$, ale $f(a_n) \notin U(f(b), \varepsilon)$
pro $\forall n$ a $(f(a_n))$ nemá limitu $f(b)$.

Izolované body Bod $b \in M \subset \mathbb{R}$ je izolovaným bodem množiny M, pokud:

$$\exists \varepsilon : U(b,\varepsilon) \cap M = \{b\}$$

$\to$ Hned je vidět, že b není limitním bodem $\Leftrightarrow$ je-li izolovaným bodem M.

Tvrzení Spojitost v izolovaném bodě: Nechť je $b \in M \subset \mathbb{R}$, bod b je izolovaným bodem množiny M
a $f : M \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce. Potom f je v bodě b vždy spojitá.

Nechť b, M a f jsou jak uvedeno. Pak $\exists \delta$, že $U(b,\delta) \cap M = \{b\}$. Pro toto δ inkluze

$$f[U(b,\delta) \cap M] = \{f(b)\} \subset U(f(b), \varepsilon) \text{ platí } \forall \varepsilon.$$

Proto je f spojitá v bodě b.

$\to$ Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, chápaná jako funkce $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, je spojitá
v každém bodě $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ svého def. oboru $\mathbb{N}$.

Riemannova funkce $r : \mathbb{R} \to \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$

def. jako: $r(x) \begin{cases} 0 \dots x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} \dots x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \ \frac{m}{n} \text{ v základním tvaru} \end{cases}$

Tvrzení Riemannova funkce je spojitá právě a jenom v iracionálních číslech

Nechť $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\frac{m}{n}$ v základním tvaru, nechť $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$. $\forall \delta \; \exists \alpha \in U(x, \delta)$, ale $r(\alpha) = 0 \notin U(r(x), \varepsilon) = U(\frac{1}{n}, \varepsilon)$, takže funkce r není spojitá.

Nechť je číslo $x \in \mathbb{R}$ iracionální a je dáno $\varepsilon \in (0,1)$. Definujeme hledané δ jako $:= \min(M)$ pro

$$M := \{ |x - \tfrac{m}{n}| \mid \tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \tfrac{m}{n} \in U(x,1), \tfrac{1}{n} \geq \varepsilon \}.$$

Toto $\delta > 0$ existuje, protože množina M je neprázdná konečná množina kladných čísel.

Též $y \in U(x, \delta) \Rightarrow r(y) \in U(r(x), \varepsilon) = U(0, \varepsilon)$, protože $\forall y \in U(x, \delta)$ je $r(y) = 0$ nebo $r(y) = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Proto je funkce r spojitá v bodě x.

Monotonie funkce Nechť M je množina reálných čísel a $f : M \to \mathbb{R}$. Funkce f

1) je neklesající, když $\forall x, y \in M : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

2) je nerostoucí, když $\forall x, y \in M : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Funkce f je monotónní, je-li neklesající či nerostoucí.

Věta Limita monotónní funkce: Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ je levý lim. bod množ. M a $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce, která je pro nějaké δ neklesající na množině $P^-(a, \delta) \cap M$.

Pak limita f v bodě a zleva existuje.

S označením $N := f[P^-(a, \delta) \cap M] \subset \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty & \dots \; N \text{ je shora neomezená} \\ \sup(N) \in \mathbb{R} & \dots \; N \text{ je shora omezená.} \end{cases}$$

Nechť N je shora neomezená a je dáno ε. $\exists x \in P^-(a, \delta) \cap M$, že $f(x) > 1/\varepsilon$. Protože f je neklesající na $P^-(a, \delta) \cap M$, pro $\theta := a - x$ je $y \in P^-(a, \theta) \cap M \Rightarrow x < y < a \Rightarrow f(y) \geq f(x) > 1/\varepsilon$.

Tedy $f[P^-(a, \theta) \cap M] \subset U(+\infty, \varepsilon)$ a $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

Nechť N je shora omezená, $s := \sup(N)$ a je dáno ε. Podle def. sup. $\exists x \in P^-(a, \delta) \cap M$ t.ž. $s - \varepsilon < f(x) \leq s$.

Protože f je neklesající na $P^-(a, \delta) \cap M$, pro $\theta := a - x$ je $y \in P^-(a, \theta) \cap M \Rightarrow x < y < a \Rightarrow$

$s - \varepsilon < f(x) \leq f(y) \leq s$

Tedy $f[P^-(a, \theta) \cap M] \subset U(s, \varepsilon)$ a $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = s$.

Věta Aritmetika limit funkcí: Nechť je $M \subset \mathbb{R}$, $A, \mathcal{U}, L \in \mathbb{R}^*$, A je limitním bodem množ. M a $f, g : M \to \mathbb{R}$, mající limity v bodě A: L a $\mathcal{U}$. Pak platí:

1) $\lim_{x \to A} (f(x) + g(x)) = \mathcal{U} + L$, je-li výraz definován

2) $\lim_{x \to A} f(x) \cdot g(x) = \mathcal{U} \cdot L$, je-li výraz definován

3) $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = \mathcal{U}/L$, je-li výraz definován. Pokud $g(x) = 0$, pak $f(x)/g(x) = 0$.

Důkaz pouze pro 3 část, ostatní podobné:

Nechť $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ je lib. posl. s $\lim a_n = A$. Podle Heineho definice limity funkce se $\lim f(a_n) = \mathcal{U}$ a $\lim g(a_n) = L$. Předpokládáme, že pravá strana je definována.
Podle věty o AL posl. $\lim \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim f(a_n)}{\lim f(a_n)} = \frac{\mathcal{U}}{L}$, protože to ale platí pro každou posloupnost (a_n), podle Heineho definice limity funkce se i $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = \mathcal{U}/L$

Věta Limita funkce a uspořádání: Buď dány prvky $A, \mathcal{U}, L \in \mathbb{R}^*$; A je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ a funkce $f, g : M \to \mathbb{R}$ mají limity v bodě A $\mathcal{U}$ a L. Pak platí:

1) Když $\mathcal{U} < L$, pak $\exists \delta$ t.ž. $f[P(A,\delta) \cap M] < g[P(A,\delta) \cap M]$

2) Když $\forall \delta \; \exists x, y \in P(A,\delta) \cap M$ s $f(x) \geq g(y)$, pak $\mathcal{U} > L$.

1) Protože $\mathcal{U} < L$, existuje ε, že $U(\mathcal{U}, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Pak podle předpokladu o limitách funkcí f a g $\exists \delta$ t.ž. $f[P(A,\delta) \cap M] \subset U(\mathcal{U}, \varepsilon)$
a $g[P(A,\delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)$.

Tedy $f[P(A,\delta) \cap M] < g[P(A,\delta) \cap M]$

2) Důkaz obměnou implikace.

Věta O dvou funkčních policajtech: Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, A je lim. bod. množ. $M \subset \mathbb{R}$ a jsou dány funkce $f, g, h : M \to \mathbb{R}$, kdy $\lim_{x \to A} f(x) = \lim_{x \to A} h(x) = L$ a
že pro nějaké δ je $\forall x \in P(A,\delta) \cap M$: $g(x) \in I(f(x), h(x))$.

Pak též $\lim_{x \to A} g(x) = L$

Nechť je dáno ε. Tedy $\exists \delta$, že $f[P(A,\delta)\cap M]$ a $h[P(A,\delta)\cap M] \in U(L,\varepsilon)$.

Díky konvexitě okolí $U(L,\varepsilon)$ máme $\forall x \in P(A,\delta)\cap M$, že $I(f(x), h(x)) \subset U(L,\varepsilon)$.

Podle předpokladu je $g[P(A,\delta)\cap M] \subset U(L,\varepsilon)$, tedy $\lim\limits_{x\to A} g(x) = L$

Věta Limita složené funkce: Nechť $A, U, L \in \mathbb{R}^*$, $M, N \in \mathbb{R}$, A je limitním bodem množiny M, U limitním bodem množiny N a funkce $g: M \to N$, $f: N \to \mathbb{R}$ mají limity

$\lim\limits_{x\to A} g(x) = U$, $\lim\limits_{x\to U} f(x) = L$. Potom složená funkce $f(g): M \to \mathbb{R}$

má limitu $\lim\limits_{x\to A} f(g)(x) = L$, právě když platí jedna z podmínek:

1) Když $U \in N$, pak $f(U) = L$.

2) Existuje takové δ, že $U \notin g[P(A,\delta)\cap M]$.

Buď dáno ε. Podle předpokladu o limitách obou funkcí existuje takové δ, že

1) $f[P(U,\delta)\cap N] \subset U(L,\varepsilon)$, a takové θ, že

2) $g[P(A,\theta)\cap M] \subset U(U,\delta)$.

Podmínka 1 je splněna.

Pak inkluzi 1) zesílíme na $f[U(U,\delta)\cap N] \subset U(L,\varepsilon)$, v $f(g)[P(A,\theta)\cap M] =$

$f[g[P(A,\theta)\cap M]] \subset f[U(U,\delta)\cap N] \subset U(L,\varepsilon)$, díky čemuž platí

i druhá inkluze. $\lim\limits_{x\to A} f(g)(x) = L$.

Podmínka 2 je splněna.

Vezmeme θ menší než je δ v ní a inkluzi 2) zesílíme na $g[P(A,\theta)\cap M] \subset P(U,\delta)$.

V $f(g)[P(A,\theta)\cap M] = f[g[P(A,\theta)\cap M]] \subset f[P(U,\delta)\cap N] \subset U(L,\varepsilon)$

díky tomu platí první inkluze a opět $\lim\limits_{x\to A} f(g(x)) = L$.

Ani jedna podmínka není splněna.

Pak $U \in N$ ale $f(U) \notin L$ a $\forall n \; \exists a_n \in P(A, 1/n)\cap M$, že $g(a_n) = U$.

Pak posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ má limitu $\lim a_n = A$ a

$\lim f(g)(a_n) = \lim f(g(a_n)) = \lim f(U) = f(U) \neq L$.

Podle Heineho definice limity funkce tedy buď $\lim\limits_{x\to A} f(g)(x)$ neexistuje, nebo $= f(U) \neq L$.

Asymptotika $O, o, \sim$.

O Nechť je $M \subset \mathbb{R}$, $f, g : M \to \mathbb{R}$ a $N \subset M$. Pokud

$$\exists c > 0 \ \forall x \in N : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|, \text{ pak } f(x) = O(g(x)).$$

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f, g : M \to \mathbb{R}$ a $g \neq 0$ na $P(A, \delta) \cap M$ pro nějaké δ.

1) Pro $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = 0$ píšeme $f(x) = o(g(x))$.

2) Pro $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = 1$ píšeme $f(x) \sim g(x)$