1) Existence $\mathbb{R}$: → Úplnost: $\forall$ neprázdná a shora omezená podmnožina má supremum.

Existuje jediné úplné uspořádané těleso $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, 0_\mathbb{R}, 1_\mathbb{R}, +_\mathbb{R}, \cdot_\mathbb{R}, <_\mathbb{R})$.

1) Základní věta algebry:

Každý nekonstantní komplexní polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ má kořen $z_0 \in \mathbb{C}$: $p(z_0) = 0$.

2) O posloupnostech:

Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Platí:

1) Existuje $(b_n) \preceq (a_n)$ a (b_n) má limitu

2) Posloupnost (a_n) nemá limitu $\Leftrightarrow$ (a_n) má dvě podposl. s různými limitami

3) Není pravda, že $\lim a_n = A \Leftrightarrow$ existuje $(b_n) \preceq (a_n)$ a $\lim (b_n) \neq \lim (a_n)$

2) Existence monotónní podposloupnosti:

$\forall (a_n) \subset \mathbb{R}$ má monotónní podposl.

3) Geometrická posloupnost

Pro číslo $q \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} = 0 & q < |1| \\ = 1 & q = 1 \\ = +\infty & q > 1 \\ \text{neexistuje} & q \leq -1 \end{cases}$$

3) liminf, limsup

$\forall (a_n) \subset \mathbb{R}$ je $H(a_n)$ neprázdná a má v lin. uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ min. a max.

↳ Množina hromadných bodů posl (a_n) → a je hromadný bod, pokud je limitou podposloupnosti

4) O harmonických číslech:

Pro $n \in \mathbb{N}$ určíme harm. číslo $= \sum_{j=1}^{n} 1/j$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$: $h_n = \log n + \gamma + \Delta_n$, kde $\gamma = 0{,}57721$ (Eulerova konst.), $|\Delta_n| < c/n$ pro nějaké c a všechny n.

2) $h_n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = 1$

4) Riemannova věta.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada typu $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdots$, nechť platí:

1) $\lim a_n = 0$

2) $\sum a_{k_n} = +\infty$ kladné členy
$\sum a_{z_n} = -\infty$ záporné členy

Pak $\forall S \in \mathbb{R}^*$ $\exists \pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$ → tedy že získám libovolně zadaný součet.

5) **O riemannově funkci:**

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ je v základním tvaru} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Riemannova funkce je spojitá právě jenom v iracionálních číslech.

5) **Limita složené funkce:**

Nechť $A, \mathcal{U}, L \in \mathbb{R}^*$, $M, N \subset \mathbb{R}$, A je lim. bod M, $\mathcal{U}$ je lim. bod N, $g: M \to N$, $f: N \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to A} g(x) = \mathcal{U}$, $\lim_{x \to \mathcal{U}} f(x) = L$. Potom složená funkce má $\lim_{x \to A} f(g)(x) = L$,

právě když je splněna jedna z podmínek:

1) Když $\mathcal{U} \in N$, pak $f(\mathcal{U}) = L$ (spojitost)

2) $\exists \delta : \mathcal{U} \notin g[P(A, \delta) \cap M]$ (Vyhýbání se vlastní limitě)

6) **Heineho definice spojitosti**

Funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in M \subset \mathbb{R} \iff$

$$\forall (a_n) \subset M : \lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = f(a)$$

6) **Blumbergova věta**

Nechť $A \subset B, C$. $f: B \to C$. : $f|A : A \to C$
$\forall x \in A : f|A(x) = f(x)$

$\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \exists M \subset \mathbb{R}$ hustá v $\mathbb{R}$, že restrikce $f|M$ je spojitá funkce.

6) **Počet spojitých funkcí**

Což je množina všech spojitých reálných funkcí

$\exists$ bijekce $h: \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$

7) **Derivace složené funkce**

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je lim. bod M, $g: M \to N$ spojitá v a, s $g'(a) \in \mathbb{R}^*$ a taková, že $g(a) \in N$ je lim. bod. $N \subset \mathbb{R}$, nechť $f: N \to \mathbb{R}$ je s $f'(g(a)) \in \mathbb{R}^*$.

Pak složená funkce $f(g) : M \to \mathbb{R}$ má derivaci:

$$(f(g(a)))' = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$, jeli tento součin definovaný.

7) **Derivace inverzní funkce**

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je lim. bod M, $f: M \to \mathbb{R}$ je prostá s $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a inv. $f^{-1} : f[M] \to M$ je spojitá v $b := f(a)$.

Potom platí následující:

1) Když $f'(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak f^{-1} má derivaci $= \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

2) Když $f'(a) = 0$ a f roste/klesá v a, $(f^{-1})'(b) = +\infty / -\infty$

3) Když $f'(a) = \pm\infty$ a b je lim. bod. $f[M]$, pak $(f^{-1})'(b) = 0$.

8) L'Hospitalovo pravidlo

$\longrightarrow$ Platí i pro levé okolí.

$A \in \mathbb{R}$, pro δ jsou $f, g : P^+(A,\delta) \to \mathbb{R}$ funkce mající f', g' na $P^+(A,\delta)$, $g' \neq 0$ na $P^+(A,\delta)$ a platí:

1) $\lim_{x \to A} f(x) = \lim_{x \to A} g(x) = 0$ nebo

2) $\lim_{x \to A} g(x) = \pm\infty$ Potom: $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pokud poslední limita existuje.

8) Konvexita a konkavita v f''

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je int, $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá s $f''(b) \in \mathbb{R}^*$ pro $\forall b \in I^o$. Pak platí:

1) $f'' \geq 0$ (≤ 0) na I^o, pak f je na I konvexní (konkávní).

2) Pokud jde o ostré nerovnosti, mluvíme o ryzí konvexitě/konkavitě.

9) Zbytky TP

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ a $\exists$ vlastní $f^{(n+1)} : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$. Pak platí:

1) Lagrangeův zbytek: $\forall x \in P(a,\delta)$ $\exists c$ mezi a a x:

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

2) Cauchyův zbytek: $\forall x \in P(a,\delta)$ $\exists c$ mezi a a x:

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n}{n!} \cdot (x-a)$$

9) Bellova čísla $\forall x \in (-1,1)$ platí:

$$e^{e^x - 1} = \exp(\exp(x) - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n \cdot x^n}{n!},$$ kde B_n je počet rozkladů n-prvkové množiny.

10) Riemann = Newton

Nechť $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spoj. funkce a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je prim. k f.

Pak: $\lim_{\Delta P \to 0} R(P, \bar{t}, f) = F(b) - F(a)$.

10) Integrace substitucí

Pokud jsou $I, J \subset \mathbb{R}$ netriviální intervaly, $g: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$ a g má na I vlastní g', pak platí následující:

1) Pokud $F = \int f$ na J, pak:
$$F(g) = \int f(g) \cdot g' \text{ na } I$$

2) Pokud je g surjekce a $g' \neq 0$ na I, pak platí:
$$G = \int f(g) \cdot g' \text{ na } I \implies G(g^{-1}) = \int f \text{ na } J.$$

11) (N) $\int_A^B$ per partes

$$[F]_A^B := \lim_{x \to B} F(x) - \lim_{x \to A} F(x)$$

Uvažme $f, g, F, G: (A, B) \to \mathbb{R}$, $A < B \in \mathbb{R}^*$, F prim. k f, G prim. k g. Pak:
$$(N)\int_A^B fG = [FG]_A^B - (N)\int_A^B Fg$$

platí vždy, pokud jsou dva ze tří členů definovány.

11) $\int r(x)$ - racionální funkce

Pro $\forall$ racionální $r(x)$ existuje prim. $R(x)$:
$$R(x) = r_0(x) + \sum_{i=1}^{k} s_i \cdot \log(|x - \alpha_i|) + \sum_{i=1}^{l} t_i \cdot \log(a_i(x)) + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \operatorname{arctan}(b_i(x)),$$
množina kořenů

kde $r_0(x)$ je rac. funkce, $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, prázdný součet $:= 0$, $s_i, t_i, u_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in Z(r)$, $a_i(x)$ jsou ireducibilní trojčleny a $b_i(x)$ jsou reálné nekonstantní lin. polynomy:
$$R(x) = \int r(x) \quad \text{na } \forall I \subset Def(r)$$

12) O restrikcích

Jestliže $a < b < c \in \mathbb{R}$ a $f: [a, c] \to \mathbb{R}$, pak:
$$f \in R(a,c) \iff f \in R(a,b) \wedge f \in R(b,c)$$
V kladném případě: $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

12) Lebesguova

$\forall f: [a,b] \to \mathbb{R}$ platí:

Množina bodů, kde f není spojitá

$$f \in R(a,b) \iff f \text{ je omezená a } NC(f) \text{ má míru } 0.$$

$M \subset \mathbb{R}$ má míru 0, pokud $\forall \varepsilon\ \exists [a_n, b_n]$ $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$: $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$

13) Riemann = Darboux

Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je:

$$f \in R(a,b) \iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}.$$

V kladném případě pak: $(R) \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$

13) HK $\int$ a N $\int$

Nechť $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $F' = f$ na (a,b).

Pak $f \in HK(a,b)$ a:

$$(HK) \int_a^b f = F(b) - F(a) = (N) \int_a^b f$$

13) Zvonn 2

Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}$, f má prim. $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, nechť $f \in R(a,b)$.

Pak existují $F(a) := \lim_{x \to a} F(x)$, $F(b) := \lim_{x \to b} F(x) \in \mathbb{R}$:

$$(R) \int_a^b f = F(b) - F(a) = (N) \int_a^b f$$

13) Délka grafu

Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá s vlastní $f' \in R(a,b)$. Funkce f pak má rektifikovatelný graf s délkou $\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$

13) Integrální kritérium

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $f : [m, +\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná a nerostoucí. Potom řada:

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) \text{ konverguje} \iff \lim_{n \to \infty} \int_m^n f < +\infty$$