Riemannův integrál: Řekneme, že $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná, napíšeme $f\in\mathcal{R}(a,b)$, pokud $\exists L\in\mathbb{R}: \forall\varepsilon\,\exists\delta$ t.ž. jakékoliv dělení P int. $[a,b]$ a jakékoli test. body $\bar{\xi}$ z P platí:

$$\Delta P<\delta \Rightarrow |\mathcal{R}(P,\bar{\xi},f)-L|<\varepsilon.$$

Pak také píšeme (R) $\int_a^b f = L$ nebo (R) $\int_a^b f(x)\,dx = L$

Tvrzení *Ekvivalentní definice r. integrovatelnosti:*

Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Následující tři jsou logicky ekvivalentní.

1) $f\in\mathcal{R}(a,b)$

2) (Cauchyova podmínka) $\forall\varepsilon\,\exists\delta: \forall$ dělení P a Q na $[a,b]$ s test. body $\bar{\xi}$ a $\bar{\nu}$ platí, že:

$$\Delta P,\Delta Q<\delta \Rightarrow |\mathcal{R}(P,\bar{\xi},f)-\mathcal{R}(Q,\bar{\nu},f)|<\varepsilon$$

3) (Heineho definice) $\forall (P_n)$ dělení $[a,b]$ s test. body $\bar{\xi}(n)$ platí, že pokud $\lim \Delta(P_n)=0$, pak posl. $(\mathcal{R}(P_n,\bar{\xi}(n),f))$ konverguje.

Pokud platí 1, pak $\forall$ posl. riemannovských součtů v 3 s normami jdoucími k nule má $\lim \mathcal{R}(P_n,\bar{\xi}(n),f)=\int_a^b f$.

Tvrzení *Změny hodnot funkce:* Předpokládejme, že $f\in\mathcal{R}(a,b)$ a že $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ se od f liší pouze v konečně mnoha hodnotách. Potom $g\in\mathcal{R}(a,b)$ a

$$\int_a^b g=\int_a^b f$$

$\int_a^b f$ **pro f def. na (a,b).** Nechť $a<b\in\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$, pro $I=(a,b)$, nebo $(a,b]$ nebo $[a,b)$. Funkci f rozšíříme na $[a,b]\to\mathbb{R}$ libovolnými hodnotami v a a b a definujeme: $\int_a^b f:=\int_a^b f_0$. Pokud pravá strana existuje.

Tvrzení *O restrikcích:* Jestliže $a<b<c\in\mathbb{R}$ a $f:[a,c]\to\mathbb{R}$, pak

$$f\in\mathcal{R}(a,c)\Leftrightarrow f\in\mathcal{R}(a,b)\wedge f\in\mathcal{R}(b,c).$$

Pro kladný případ: $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$

Plocha pod grafem A_f: Pokud $f \in R(a,b)$, pak A_f oblasti D_f pod G_f funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definujeme:

$$A_f := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tvrzení **Neomezené funkce jsou špatné:** Pokud je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neomezená, pak $f \in R(a,b)$.

Předpokládáme, že f je neomezená a ukážeme, že $\forall n\ \exists$ dělení P int. $[a,b]$ s $\bar{t}$ test. body, že:

$$\Delta(P) < 1/n \quad \text{a} \quad |R(P,\bar{t},f)| > n$$

To je v rozporu s Cauchyho podmínkou pro riemannovskou integrovatelnost.

Z neomezenosti f a kompaktnosti $[a,b]$ vyplývá, že $\exists$ konvergentní posl. $(b_n) \subset [a,b]$ s $\lim (b_n) = \alpha \in [a,b]$ a s $|\lim f(b_n)| = +\infty$. Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$.

Jako P vezmeme lib. dělení $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ int. $[a,b]$ s $\Delta(P) < 1/n$, ale takové, že existuje jediný index $j \in \{1 .. k\}$, že $\alpha \in [a_{j-1}, a_j]$. Pak vybereme lib. test. body t_i z $[a_{i-1}, a_i]$ $\forall i \neq j$ a utvoříme neúplný Riemannovský součet

$$s := \sum_{i\neq j}^{k} (a_i - a_{i-1}) f(t_i)$$

Nyní vybereme zbývající test. bod $t_j \in [a_{j-1}, a_j]$ tak, aby $|(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| > |s| + n$, což lze, protože $b_n \in [a_{j-1}, a_j]$ pro každé dostatečně velké n.

Pak definujeme $\bar{t}$ jako sestávající ze všech těchto test. bodů a pomocí Δ-nerovnosti $|u+v| \geq |u|-|v|$ dostaneme $|R(P,\bar{t},f)| \geq |(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| - |s| \geq n$

Tvrzení **Příliš nespojité funkce:** Je-li funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nespojitá v každém bodě nějakého $[c,d]\subset[a,b]$, $c<d$, pak $f \notin R(a,b)$

Řídká množina: Množina $M \subset [a,b]$ je řídká, pokud $\forall U(c,\varepsilon)$ s $c \in [a,b]$ $\exists U(d,\delta) \subset U(c,\varepsilon) \cap [a,b]$: $U(d,\delta) \cap M = \emptyset$

Věta Baireova: $a < b \in \mathbb{R}$ a $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, pak některá množina M_n není řídká.

Předpokládejme, že každá M_n je řídká a odvodíme spor.

Protože M_1 je řídká, $\exists [a_1,b_1] \subset [a,b]: a_1 < b_1$ a $[a_1,b_1] \cap M_1 = \emptyset$.

Protože M_2 je řídká $\exists [a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]: a_2 < b_2$ a $[a_2,b_2] \cap M_2 = \emptyset$

$$\vdots$$

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \ldots, \text{ že } \forall n \quad a_n < b_n \text{ a } [a_n,b_n] \cap M_n = \emptyset.$$

Nechť $\alpha := \lim a_n \in [a,b]$. Tato limita existuje a leží v $[a,b]$, protože posl. (a_n) je neklesající a zdola omezená číslem a, shora číslem b. Dokonce $a_n < b_m$ $\forall n,m$, takže $\alpha \in [a_n,b_n]$ $\forall n$. Pak ale $\alpha \in M_n$ $\forall n$, což je spor s $\alpha \in [a,b]$.

Míra množiny: Množina $M \subset \mathbb{R}$ má míru 0, pokud $\forall \varepsilon$ $\exists [a_n,b_n]$ $n \in \mathbb{N}$ a $a_n < b_n$, že:

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

$$DC(f) := \{x \in M \mid f \text{ je nespojitá v } x\}$$

Věta Lebesguova: $\forall f: [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$f \in R(a,b) \iff f \text{ je omezená a } DC(f) \text{ má míru } 0.$$

Důsledek: Dobré operace pro r. integrov.: Platí následující:

1) $f,g \in R(a,b) \Rightarrow cf + dg \in R(a,b)$
2) $f,g \in R(a,b) \Rightarrow f \cdot g \in R(a,b)$
3) Pokud $g: [a,b] \to M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$, $g \in R(a,b)$ a f je spojitá a omezená, pak $f(g) \in R(a,b)$
4) Pokud $g: [c,d] \to [a,b]$ a $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, g je spojitá a $f \in R(a,b)$, pak $f(g) \in R(a,b)$

Věta Spojité funkce jsou r. integrovatelné: Je-li $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, pak $f \in R(a,b)$.

Věta Monotónní funkce jsou r. integrovatelné: Pokud je $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monotónní, pak $f \in (a,b)$.

Věta 2vana2: Nechť $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b \in \mathbb{R}$, má prim. $F:(a,b) \to \mathbb{R}$ a nechť $f \in R(a,b)$. Pak existují konečné $F(a) := \lim_{x \to a} F(x)$ a $F(b) := \lim_{x \to b} F(x)$ a:

$$(R) \int_a^b f = F(b) - F(a) = (N) \int_a^b f.$$

Lipschitzovsky spojitá funkce je taková funkce $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, pokud $\exists C > 0$:

$$\forall x,y \in M : |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$$

Věta 2vana1: Nechť $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ je v $R(a,b)$. Potom $\forall x \in (a,b]$ je $f \in R(a,x)$, a $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ daná jako $F(x) := \int_a^x f$, je lipschitzovsky spojitá. Navíc pro ni platí, že $F'(x) = f(x)$ v každém bodě spojitosti $x \in [a,b]$ funkce f.