**Tvrzení** Podobné Riemannovy součty: Nechť $a, b \in \mathbb{R}: a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá.

Potom $\forall \varepsilon\ \exists \delta$: pokud $P$ a $Q$ jsou dělení intervalu $[a,b]$ s normami $\Delta(P), \Delta(Q) < \delta$ a $\bar{t}, \bar{u}$ jsou lib. testovací body z, po řadě, $P$ a $Q$, pak $|R(P,\bar{t},f) - R(Q,\bar{u},f)| < \varepsilon$.

**Riemannův součet** definujeme:

$$R(P,\bar{t},f) := \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i),$$

kde $P$ je dělení intervalu $\parallel$ $(a_0, a_1, \dots a_k)$: $a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_k = b$ a $\bar{t} = (t_1, \dots t_k)$ s $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ jsou lib. test. body.

**Limity Riemannových součtů**: Nechť je $a, b, L \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, která nemusí být spojitá.

Pokud pro jakékoli dvě posl. $(P_n)$ dělení $P_n$ intervalu $[a,b]$ a $(\overline{t(n)})$ testovacích bodů $\overline{t(n)}$ z $P_n$ platí, že:

$$\lim \Delta(P_n) = 0 \Rightarrow \lim R(P_n, \overline{t(n)}, f) = L,$$

napíšeme $\lim_{\Delta(P) \to 0} R(P,\bar{t},f) = L$ a řekneme, že Riemannovy součty funkce $f$ mají limitu $L$.

**Důsledek** $\exists$ limity R. součtů: $\forall f [a,b] \to \mathbb{R}$: $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, spojitou $\exists$ konečná limita

$$\lim_{\Delta(P) \to 0} R(P,\bar{t},f) \in \mathbb{R}.$$

Nechť je $\lim_{\Delta(P) \to 0} = 0$. Pak $R(P_n, t(n), f)$ má limitu $L \in \mathbb{R}$. Pokud tak budu mít jinou posloupnost dělení tohoto intervalu, zase s $\lim_{\Delta(Q) \to 0} = 0$, tak platí, že limita rozdílu těchto dvou Riemannových součtů $= 0$, tedy že i další Riemannův součet má stejnou limitu.

**Důsledek** Riemann = Newton: Nechť $a < b \in \mathbb{R}$, $f[a,b] \to \mathbb{R}$ je spoj. funkce a $F[a,b] \to \mathbb{R}$ prim. funkce k $f$. Pak:

$$\lim_{\Delta P \to 0} R(P,\bar{t},f) = F(b) - F(a).$$

**Plocha pod grafem:** Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, pro $a<b\in\mathbb{R}$, spojitá a $D_f\subset\mathbb{R}^2$ je oblast pod jejím grafem $G_f$. Plocha $A_f\subset\mathbb{R}$ oblasti $D_f$ lze definovat:

1) (I. Newton): $A_f := F(b)-F(a)$ pro lib. prim. $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ k $f$.

2) (Riemann): $A_f := \lim\limits_{\Delta(P)\to 0} R(P,\bar{t},f)$

**Newtonův Integrál** Nechť $a,b\in\mathbb{R}: a<b$ a $F,f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jsou t.ž. $F$ je prim. k $f$.

Newtonův integrál funkce $f$ přes interval $(a,b)$ definujeme jako:

$$\int_a^b f = F(b)-F(a) := \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x),$$ jestliže poslední dvě limity existují a jsou konečné.

Pak také plocha $A_f := \int_a^b f$

Funkce je Newtonovsky integrovatelná „$f\in N(a,b)$" na $(a,b)$.

**Tvrzení** Monotonie (N) $f$: Pokud jsou funkce $f,g\in N(a,b)$ a $f\leq g$ na $(a,b)$,

pak:
$$(N)\int_a^b f \leq (N)\int_a^b g$$

Nechť $F$ a $G$ jsou na $(a,b)$ prim. k $f$ a $g$. Vezmu lib. $c<d$ v $(a,b)$ a pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě na $F-G$ a int. $[c,d]$:

Pro $e\in(c,d)$ je:

$$\begin{aligned}(F(d)-G(d))-(F(c)-G(c)) &= (F-G)'(e)\cdot(d-c)\\ &= (F'(e)-G'(e))\cdot(d-c)\\ &= (f(e)-g(e))\cdot(d-c)\leq 0\end{aligned}$$

Proto $F(d)-F(c)\leq G(d)-G(c)$.

Tato vlastnost se zachová na limitních přechodech $c\to a$ and $d\to b$, dostáváme uvedenou nerovnost.

Tvrzení **Asymptotika (N) $\int$:** Nechť $f, g \in N(a,b)$, nechť $g > 0$ na $(a,b)$, nechť $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ a nechť $\lim_{x \to a} (N) \int_x^b g = +\infty$. Pak:

$$(N) \int_x^b f = o\left( (N) \int_x^b g \right) \quad (x \to a).$$

Věta **L'Hospitalovo pravidlo, podmínka 2:** Nechť $A \in \mathbb{R}$. Nechť pro nějaké $\delta$ mají funkce $f, g : P^+(A, \delta) \to \mathbb{R}$ na $P^+(A, \delta)$ konečné derivace, $g' \neq 0$ na $P^+(A, \delta)$ a nechť $\lim_{x \to A} g(x) = \pm\infty$. Pak:

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to A} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$ pokud poslední limita existuje.

Platí stejně pro levé okolí.

**Darbouxova vlastnost:** Pokud $a < b$ v $I$ a $c$: $f(a) < c < f(b)$, pak $f(d) = c$ pro nějaké $d \in (a,b)$.

Věta: **Derivace jsou Darbouxovy:** Každá funkce $f : I \to \mathbb{R}$ def. na int. $I \subset \mathbb{R}$, která má prim. funkci, má Darbouxovu vlastnost. → Nabývání mezihodnot.

Předpokládáme $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b \in \mathbb{R}$, má prim. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $f(a) < c < f(b)$.

Uvažme $G(x) := F(x) - cx : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Ta má na $[a,b]$ konečnou derivaci $G'(x) = F'(x) - c = f(x) - c$. Speciálně je $G$ spojitá.

Pak musí $G$ na $[a,b]$ nabýt minima v $d \in [a,b]$.

Z $G'(a) = f(a) - c < 0$ a $G'(b) = f(b) - c > 0$. Pak $d \in (a,b)$.

Pak ale $f(d) - c = G'(d) = 0$, takže $f(d) = c$.

Věta se většinou používá obráceně → pokud není funkce Darbouxovská, nemá prim. funkci.

Věta **Linearita $\int$:** Nechť $f, g : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce def. na netriv. int. $I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak:

$$\int (af + bg) = a\int(f) + b\int(g).$$

Tedy pokud $G$ prim k $g$, $F$ prim k $f$, pak $aF + bG$ je prim k $af + bg$

Věta **Integrace Per Partes:** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je netriv. int. a $f, g, F, G : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce, kdy $F$ prim k $f$, $G$ prim k $g$.

Pak:

$$\int fG = FG - \int Fg \qquad \left(FG = \int fG + \int Fg\right)$$

$\longrightarrow$ pokud $H$ prim k $Fg$, pak $FG - H$ je prim k $fG$.

$$(FG - H)' = F'G + FG' - H' = fG + Fg - Fg = fG$$

Věta **Integrace substitucí:** Pokud jsou $I, J \subset \mathbb{R}$ netriv. int. $g : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$ a $g$ má na $I$ vlastní $g'$, pak platí následující:

1) Pokud $F = \int f$ na $J$, pak:

$$F(g) = \int f(g) \cdot g' \text{ na } I$$

2) Pokud je $g$ surjekce a $g' \neq 0$ na $I$, pak platí implikace

$$G = \int f(g) \cdot g' \text{ na } I \implies G(g^{-1}) = \int f \text{ na } I.$$