1) Funkce, prostá, na a bijekce:

Funkce $f: A \to B$ je $\forall (A, B, f)$, že $f \subset A \times B$ a $\forall a \in A \; \exists! \, b \in B$.

Prostá, pokud $\forall a, b \in A: a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Na, pokud $f[X] = Y$

Bijekce, pokud prostá a na.

2) Supremum, Infimum a lin. uspořádání —> relace $<$ na množině, tranzitivní, ireflexivní, trichotomická

Supremum: minimum horních mezí množiny $:= \min(H(X))$

Infimum: maximum dolních mezí množiny $:= \max(D(X))$

Meze: Nechť $B \subset A$.

Horní: prvek $a \in A: \forall b \in B \;\; b \leq a$

Dolní: prvek $a \in A: \forall b \in B \;\; b \geq a$

3) (Nejvýše) spočetné a nespočetné množiny

Množina X je nekonečná, pokud existuje prostá $f: \mathbb{N} \to X$, jinak je konečná. —> dokonce i vím, jak je velká, rozhodně můžu očíslovat.

Množina X je spočetná, když existuje bijekce $f: \mathbb{N} \to X$ —> můžu je očíslovat

Množina X je nejvýše spočetná, když je konečná nebo spočetná.

Množina X je nespočetná, pokud není nejvýše spočetná.

4) Vlastní/nevlastní limita posl., podposl.

Nechť (a_n) je reálná posl. a $L \in \mathbb{R}^*$. Pokud

$$\forall \varepsilon \; \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \varepsilon), \text{ pak } \lim a_n = L$$

—> Pokud je vlastní, tak $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists n_0: n \geq n_0 \; |a_n - a| < \varepsilon$

$L \in \mathbb{R} \Rightarrow$ lim. je vlastní $\Rightarrow$ posl. konverguje

$L = \pm\infty \Rightarrow$ lim. je nevlastní $\Rightarrow$ posl. diverguje.

Pokud je nevlastní, $\forall c \; \exists n_0 : n \geq n_0 \quad a_n < c \quad -\infty$ nebo $a_n > c \quad +\infty$

Posl. (b_n) je podposl. (a_n), pokud $\exists$ posl. $m_1 < m_2 < \dots$, že $\forall n$:

$b_n = a_{m_n}$. Značíme $(b_n) \preceq (a_n)$

5) lim inf a lim sup posloupnosti

Hromadný bod: Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $(a_n) \subset \mathbb{R}$. A je hromadný bod posl. (a_n), pokud má (a_n) podposl. (a_{n_k}), že $\lim a_{n_k} = A$.

$$H(a_n) := \{A \in \mathbb{R}^* \mid A \text{ je hromadný bod } (a_n)\} \subset \mathbb{R}^*$$

lim inf (a_n) je nejmenší prvek z $H(a_n)$ v lin. usp. $(\mathbb{R}^*, <)$

lim sup (a_n) je největší -||-

6) Řady, částečný součet řady, součet řady

Řada $\quad \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots := \lim (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

– posl. je tvořena částečnými součty řady

Součet řady := lim posl. částečných součtů := $\lim s_n := \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \in \mathbb{R}^*$

Harmonická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, diverguje, má součet $= +\infty$

7) Geometrická řada, absolutně konvergentní řada

Absolutně konvergentní řada: konverguje-li $\sum |a_n|$.

Geometrická řad.: pro $q \leq -1$ nemá součet, pro $q < |1|$ má součet $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

pro $q \geq 1$ má součet $+\infty$

<= resp. $q \in (-1,1) \Rightarrow$

$q^n + q^{n+1} + \ldots = \frac{q^n}{1-q}$

8) limita funkce, jednostranná lim. funkce

Limita

Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, A je lim. bod množiny M, $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce.

Pokud $\forall \varepsilon \, \exists \delta : f[P(A,\delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)$, píšeme: $\lim_{x \to A} f(x) = L$

Jednostranná:

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, a je levý (pravý) lin. bod množiny M a $f: M \to \mathbb{R}$.

Pokud $\forall \varepsilon \, \exists \delta : f[P^-(a,\delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)$, píšeme: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

(stejně to funguje obráceně)

9) Exponenciála, logaritmus, cosinus, sinus

$$e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\exp(0) = 1$

$\exp(x) > 0$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

exp je rostoucí

$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$

↳ je AK pro $\forall x \in \mathbb{C}: n > |x|$

$$\log := \exp^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$\log(1) = 0$

$\log(xy) = \log x + \log y$

log je rostoucí

$\lim_{x \to -\infty} \log(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

AK $\forall x \in \mathbb{R}$.

10) Spojitost funkce v bodě, jednostranná...

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v bodě a, pokud

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta : f[U(a,\delta) \cap M] \subset U(f(a), \delta).$$

Pokud bude jednostranná, nahradí se $U(a,\delta)$ za $P^{\pm}(a,\delta)$

11) Asymptotické symboly

O: Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f, g: M \to \mathbb{R}$, $N \subset M$. Pokud

$\exists c > 0 \; \forall x \in N: |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$, pak $f(x) = O(g(x))$

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ je lim. bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f, g: M \to \mathbb{R}$, $g \neq 0$ na $P(A,\delta) \cap M$ pro nějaké δ

1) Pro $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ píšeme $f(x) = o(g(x))$ $(x \to A)$

2) Pro $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ píšeme $f(x) \sim g(x)$ $(x \to A)$

12) Kompaktní, otevřená, uzavřená a omezená množina

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, když $\forall (a_n) \subset M$ má konvergentní podposl. (a_{n_k}) s $\lim a_{n_k} \in M$.

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, když $\exists c \, \forall a \in M: |a| < c$

–||– je uzavřená, $\forall (a_n) \subset M: \lim a_n = a \in M$

–||– je otevřená, $\forall a \in M \, \exists \delta : U(a, \delta) \subset M$

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená $\iff \mathbb{R} \setminus \{M\}$ je otevřená

–||– je kompaktní $\iff M$ je omezená a uzavřená

13) Globální, lokální a ostré extrémy

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f: M \to \mathbb{R}$. f má v a na M glob. maximum, resp. minimum, když:

$$\forall x \in M : f(x) \leq f(a) \text{ , resp. } f(x) \geq f(a).$$

Funkce f má lokální maximum, resp. minimum, když:

$$\exists \delta \, \forall x \in U(a, \delta) \cap M: f(x) \leq f(a) \text{, resp. } f(x) \geq f(a).$$

Ostrý je to tehdy, pokud platí ostré nerovnosti v definici.

14) Derivace funkce, jednostranné derivace

Nechť $a \in M$ je lim. bod množ. $M \subset \mathbb{R}$ a $f := f(x) : M \to \mathbb{R}$ je funkce.

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{VASF}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Nechť $a \in M$ je levý, resp. pravý limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce.

$$f'_-(a) := \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{resp.}$$

$$f'_+(a) := \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Jakmile mám dvě stejné jednostranné, i celková bude stejná. Pokud mám celkovou, alespoň jedna jednostranná bude stejná.

15) Standardní definice tečny

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je lim. bod. množ. M, $f: M \to \mathbb{R}$ diferencovatelná.

Tečnou ke grafu f v bodě $(a, f(a)) \in G_f$ rozumíme přímku ℓ danou rovnicí

$$\ell: y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$$

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Tedy přímka se směrnicí $f'(a)$

$$f'(a)\cdot(x-a) + f(a) = f(x)$$

16) Derivace vyšších řádů

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná otevřená množina a $f = f(x): M \to \mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme induktivně konečnou či nekonečnou posloupnost funkcí $f^{(n)}(x): M \to \mathbb{R}$.

1) $f^{0}(x) := f(x)$

2) Pro $n > 0$:

Pokud $f^{(n-1)}(x)$ je def. a má $\forall a \in M$ vlastní derivaci, pak $\forall a \in M$ def. hodnotu n-té funkce jako:

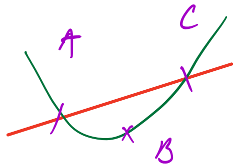
$$f^{(n)}(a) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'(a)$$

17) Konvexnost / Konkávnost ($\cup$ / $\cap$)

Nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je funkce def. na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Je (na I) konvexní, pokud $\forall a < b < c$ v I platí:

B A C

$$(b, f(b)) \leq h(a, f(a), c, f(c))$$



Jde-li o ostrou nerovnost, je to ryze konvexní.

18) Inflexní bod

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je OCB v M, $f: M \to \mathbb{R}$, ℓ je tečna k G_f v $(a, f(a))$.

Bod a je inflexní, jakmile:

$$\exists \delta\ \forall x \in P^-(a,\delta) \cap M \text{ a } \forall x' \in P^+(a,\delta) \cap M:$$

$$(x, f(x)) \leq \ell \leq (x', f(x'))$$, resp. i opačné nerovnosti.

19) Svislé asymptoty a asymptoty v nekonečnu

Svislé asymptoty:

Pravé fungují obdobně.

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ je levý limitní bod M, $f: M \to \mathbb{R}$.

Když $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, nazveme přímku $x = b$ levou svislou asymptotou.

Asymptoty v nekonečnu:

V $-\infty$ fungují podobně.

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $+\infty$ je lim. bod M, $a, b \in \mathbb{R}$ a $f: M \to \mathbb{R}$. Když:

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$, nazveme přímku $y = ax + b$

asymptotou v $+\infty$.

20) Taylorův polynom funkce, Taylorova řada funkce

TP funkce:

Nechť je $n \in \mathbb{N}_0$, funkce $f: U(b, \delta) \to \mathbb{R}$ má vlastní $f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$. Pro $n=0$ se rozumí spojitost v b.

Pak existuje právě jeden polynom

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(b) \cdot (x-b)^j}{j!}, \text{ že } \lim_{x \to b} \frac{f(x) - p(x)}{(x-b)^n} = 0$$

TŘ funkce:

Nechť $f: U(a, \delta) \to \mathbb{R}$ má $\forall n \in \mathbb{N}$ vlastní $f^{(n)}: U(a, \delta) \to \mathbb{R}$.

Pokud $\forall x \in U(a, \delta)$ je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$, řekneme, že f je na $U(a, \delta)$ součtem své Taylorovy řady se středem v a.

Taylorovy polynomy jsou tedy částečné součty řad.

Zbytek Taylorova polynomu $R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$, $x \in U(a, \delta)$

21) Primitivní funkce

Pro funkce $F, f: I \to \mathbb{R}$ def. na netriv. int. $I \subset \mathbb{R}$ řekneme, že F je prim. fce k f, píšeme $F = \int f$, pokud F má na I vlastní derivaci a:

$$\forall b \in I: F'(b) = f(b)$$

22) Stejnoměrná spojitost

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá (na M), pokud:

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta: a \in M \Rightarrow f[U(a,\delta) \cap M] \subset U(f(a), \varepsilon).$$

Jediné δ tak musí vyhovovat pro všechny prvky v M.

23) (Obecný) Newtonův integrál

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$ a $F, f: (a,b) \to \mathbb{R}$, kdy $F'(x) = f(x)$.

Newtonův integrál funkce f přes (a,b) definujeme jako:

$$(N)\int_a^b f = F(b) - F(a) := \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)$$

, jestliže poslední dvě limity existují a jsou konečné.

To se, tzv, rovná ploše pod grafem G_f.

Obecný: Nechť $A < B \in \mathbb{R}^*$ a $F, f: (A, B) \to \mathbb{R}$, kdy F je prim. k f.

Newtonův integrál def. jako:

$$(N)\int_A^B f = F(B) - F(A) := \lim_{x \to B} F(x) - \lim_{x \to A} F(x)$$

, jestliže poslední dvě limity existují a jsou vlastní.

Zobecnění obecného. Povolíme $B \leq A$.

Pak $(N)\int_A^A f := 0$, $(N)\int_A^B f = -(N)\int_B^A f$.

24) Riemannův integrál:

Řekneme, že $f: [a,b]$ je riemannovsky integrovatelná, $(f \in R(a,b))$, pokud:

$\exists L \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon\, \exists \delta$: pro jakékoli dělení P int. $[a,b]$ a jakékoli test. body $\overline{t}$ z P platí:

$\Delta(P) < \delta \Rightarrow |R(P, \overline{t}, f) - L| < \varepsilon$. Pak také píšeme

$$(R)\int_a^b f = L \quad \text{nebo} \quad (R)\int_a^b f(x)\,dx = L$$

25) Henstock-Kurzweilův integrál

Funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R} \in HK(a,b)$, pokud $\exists L \in \mathbb{R}$, že $\forall \varepsilon\ \exists \delta_\varepsilon$, kde δ_ε je kalibr na $[a,b]$, že $\forall$ dělení P int. $[a,b]$ a test. $\bar{t}$ z P platí:

P a $\bar{t}$ jsou δ_ε-jemné $\Rightarrow |R(P,\bar{t},f) - L| < \varepsilon$.

$$(HK)\int_a^b f = L$$

26) Délka grafu funkce, plocha mezi grafy, objem rotačního tělesa

Délka grafu:

Nechť $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ má na (a,b) vlastní $f' \in R(a,b)$. Funkce f má pak rektifikovatelný graf s délkou

$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}$$

$$\ell(f) := \sup\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} \left\| \left(a_{i-1}, f(a_{i-1})\right) \left(a_i, f(a_i)\right) \right\| \mid (a_0, a_1, \dots a_n) \in D(a,b)\right\}\right)$$

Plocha mezi grafy:

Nechť $f, g \in R(a,b)$ a $f \leq g$ na $[a,b]$.

Pak plocha $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\} := \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)$

Objem rotačního tělesa:

Nechť funkce $f \in R(a,b)$ a je nezáporná.

Pak objem $(V(a,b,f)) := \pi \int_a^b f^2$

Pomůcka – πr^2