$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Spočítejte limitu:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$$\frac{e^x - 1}{x} \nearrow \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \dots\right) - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots$$

teď už můžu dosadit za x nulu a bude to definované!

$$\to 1 + \frac{0}{2} + \frac{0}{6} + \dots + 0 + \dots = 1$$

$\frac{e^0 - 1}{x} = \frac{0}{0}$ není definováno!

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \nearrow \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$

teď už dosadím nulu a bude to definováno, případně x^2 mohu znovu vytknout.

↳ opět $\frac{\sin 0}{0}$ není definovaný

↳ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Aritmetika limit

c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x}{6} + \frac{x^2}{120} - \dots\right) \right)$

pravostranná $= +\infty - 0$

$x \to 0^-$ levostranná $= -\infty - 0$

2 tohle vyplývá, že to není celkově limita, jelikož jednotlivé strany nemají stejnou limitu.

Pozorování:

$\sin x \in (-1, 1)$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

	$x \to 0$	$x \to +\infty$
$\frac{\sin x}{x}$	1	0
$\sin \frac{1}{x}$	neexistuje	0

$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

$\sin x_k = 1$

$y_k = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$

$\sin y_k = -1$

dvě různé limity těchto argumentů

nemůžu použít aritmetiku, ale musím použít větu o složení funkci

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = L$$

$$\lim_{x \to c} g(x) = d$$

$$\lim_{x \to d} f(x) = L$$

musí být spojitá

Spočtěte limitu:

→ jelikož jsme už výš spočítali danou obrácenou hodnotu. Obrácená hodnota ale musí mít stejnou limitu.

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=1$$

$$f(g)=f(g(x))=\frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)}-1}=\frac{\ln(x+1)}{x}$$

↳ Toto však není v 0 definováno, tedy to není ani spojité.

Spočítejte limitu:

→ Pokud mám po dosazení prvky nenulové, můžu použít aritmetiku limit.

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^3+1}{3x^5-7x^2-2}$$

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^2}{x^3-12x+16}=\frac{(x-2)\cdot(x+1)}{(x-2)\cdot(x^2+2x-8)}$$

c) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$$

nulový jmenovatel, musím rozložit

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cdot(1+2x)\cdot(1+3x)-1}{x}$$

$(1+x)\cdot(1+2x)\cdot(1+3x)=$

$(1+x+2x+2x^2)\cdot(1+3x)=$

$1+x+2x+2x^2+3x+3x^2+6x^2+6x^3=$

$6x^3+11x^2+6x+1$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

f) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$$

a) $$\frac{\frac{1}{x^5}\cdot\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)}{\frac{1}{x^5}\cdot\left(3-\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^5}\right)}=\frac{(2+0+0)}{(3-0-0)}=\frac{2}{3}$$

aritmetika limit

b) $$\frac{(x-2)^2\cdot(x+1)^2}{(x-2)^2\cdot(x+4)}=\frac{(x+1)^2}{(x+4)}=\frac{3^2}{6}=\frac{3}{2}$$

→ zde nejsou nulové členy, můžu použít aritmetiku

c) $$\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot(x-5)}=\frac{(x-2)}{(x-5)}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

↘ zde už můžu použít aritmetiku limit!

d) $$\frac{6x^3+11x^2+6x}{x}=6x^2+11x+6=6\cdot 0+11\cdot 0+6=6$$

zde už zase můžu použít aritmetiku limit

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1}+x)-\cancel{1}}{\cancel{x}\cdot(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

Co je toto?

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}}{\dfrac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)\cdot(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}}=\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{2}$$

$$(C-D)\cdot(C^2+CD+D^2)=C^3-D^3$$

$$(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$$

g) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

$$\frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \cdot \frac{1/\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{\frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$