$$2 = \sqrt[n]{2^n} \le \sqrt[n]{n^2 + 2^n} \le \sqrt[n]{2\cdot 2^n} = \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{2^n} \Big\} \to \lim 2$$

$$\le \sqrt[n]{n^2\cdot 2^n}$$

dolní i horní odhad s limitou 2, resp. stejnou limitou.

Spočítej limitu:

$$d_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \quad (a,b,c \in \mathbb{R}^+) \quad \text{Búno } a \ge b \ge c \ge 0$$

Tohle jsou odhady

$$\sqrt[n]{a^n} \le \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \le \sqrt[n]{3a^n} = \sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{a^n}$$

$\lim = a$

horní i dolní limita stejná.

$\lim = a$

$$c_n = \sqrt[n]{n^2 + 2^n} \to 2$$

$$b_n = \sqrt[n]{2^n + n - 1} \to 1$$

$$a_n = \sqrt[n]{n+1} \to 1$$

$c \in \mathbb{R},\ c > 0$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$a_1 = \sqrt{c}$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c},\quad n \in \mathbb{N}$

Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = A$ (jako bych se posunul o jeden prvek)

2) Najít limitu

věta o $\lim \sqrt{\ }$

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + c} = \sqrt{\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + c} = \sqrt{A+c}$$

$A = \sqrt{A+c}$ $\qquad a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ díky tomuhle chceme jen nezáporná čísla

$$A^2 = A + c \to A^2 - A - c = 0 \to A_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{c + \frac{1}{4}} \to \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}}$$

1) Dokázat existenci limity

- ukážeme, že je:
  - a) rostoucí
  - b) shora omezená

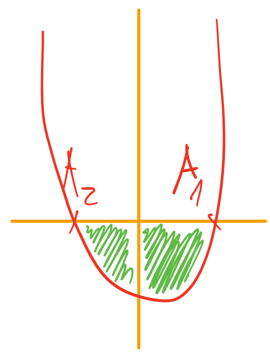
(a) $a_n < a_{n+1}$

$\sqrt{a_n + c} > a_n > 0$

$a_n + c > a_n^2$

$0 > a_n^2 - a_n - c$

pro $a_n \in (A_2, A_1)$



(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n < A_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}}$

$n = 1$ $\quad a_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c + \frac{1}{4}} < \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}}$ ✓

$n \to n+1$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{A_1 + c} = \sqrt{A_1^2} = A_1$$

Tohle byl důkaz přesně pozpátku

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \sqrt[n]{n} > 1$$

budu dokazovat, že to a_n jde k nule, aby platilo $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \; : \; \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$$

$$n = (1+a_n)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_n^i \geq \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot a_n^2$$

binom.

součet bude určitě větší než každý jednotlivý člen

$$1 \geq \frac{(n-1)}{2}\cdot a_n^2$$

$$\frac{2}{n-1} \geq a_n^2 \qquad \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq a_n \geq 0$$

Věta o dvou policajtech.

$\lim = 0$ $\qquad$ tudíž i $\lim a_n = 0$ $\qquad$ $\lim = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 + 0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

f má v bodě $a \in \mathbb{R}^+$ limitu $A \in \mathbb{R}^+$, pokud:

$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$

→ okolí

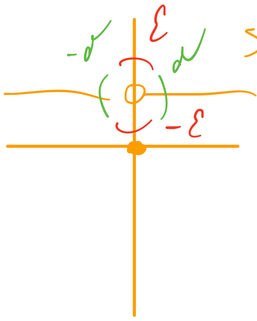
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$$

tedy x v okolí bude mít funkční hodnotu v okolí ε.

Okolí nekonečna:

$$U(\infty, \varepsilon) = \left(\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \left(-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}\right)$$



$\text{sgn}^2(x)$:

$$\lim_{x \to 0} \text{sgn}^2(x) = 1$$

?

přestože v bodě 0 je $\text{sgn} = 0$, tak limita je 1, protože v tom nejbližším okolí $x = 0$ je $f(x) = 1$.

Proč neexistuje $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$?

Chceme: $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\delta_{\frac{1}{2}}$

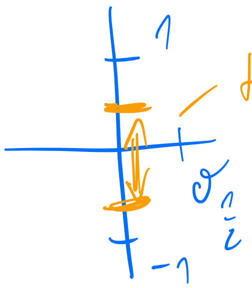
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (-\delta, \delta) : \sin \frac{1}{x} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

stačí zvolit dostatečně velké „k".

Ukážeme:

$$\forall \delta > 0\ \exists x_{1,2} \in (0, \delta) : \sin \frac{1}{x_1} = 1 \Leftarrow \frac{1}{x_1} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} < \delta$$

$$\sin \frac{1}{x_2} = -1$$



tohle je ale pouze |1|, zatímco pro δ mám 1 a -1, což je |2|.