PŘ

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n)$ neexistuje

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $=0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ $=0$

Zadání

řešení

a) najdu si 2 podposloupnosti, které porovnám

např. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí t.ž. $\frac{1}{2} \leq \sin(a_n) \leq 1$

$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí t.ž. $-1 \leq \sin(b_n) \leq -\frac{1}{2}$

jelikož nemají stejnou limitu vím, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n)$ neexistuje $\boxtimes$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \sin(a_n) = 0$

platí, ale zatím to nemáme dokázané

- musíme na to jinak: omezíme funkcemi

Věta (o dvou policajtech):

$a_n \leq b_n \leq c_n \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

$\Downarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

$$0 \leftarrow 0 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \boxtimes$$

c)

$$0 \leftarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0 \qquad \boxtimes$$

PR

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} \quad (n \geq 2) = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = 1$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$

rozšíříme

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\cancel{n}+1)-(\cancel{n}-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{2}{\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)-(n+1)}{(\text{—n——})^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)^2} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \dfrac{\cancel{1}+\frac{1}{n} - \cancel{1}+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}_{1}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}} = 1$

$= \dfrac{2}{1+1} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = L \geq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\sqrt{a_n}\cdot\sqrt{a_n}\right)}_{a_n} = L\cdot L = L^2 = A$$

PR: důkaz existence limity (přes monotonii a omezenost)

$c > 0$

$a_1 = \sqrt{c}$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \qquad (n \geq 1)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

2) pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + c} = \sqrt{\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + c} = \sqrt{A + c}$$

$A = \sqrt{A + c}$

$A^2 = A + c \quad \rightarrow \quad A_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{c + \frac{1}{n}}$ → záporný kořen neodpovídá zadání

$A^2 - A - c = 0$

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{n}}}}$$

a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kladná ✓

b) a_n ? a_{n+1} rostoucí na $(0, A)$ ✓

a_n ? $\sqrt{a_n + c}$

a_n^2 ? $a_n + c$

$a_n^2 - a_n - c$? 0

$<$

1) existence a

c) omezená shora A (indukcí)

$n=1: \quad a_1 = \sqrt{c} < A = \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}}$

$n \to n+1: \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \leq \sqrt{A + C} = A$ ✓

PŘ hromadné body

$a_n = (-1)^n$ Hrom. $= \{\pm 1\}$

$a_1 = 1$

$a_n = \min \{ d \in \mathbb{N} : d \geq 2 \wedge d \mid n \}$

$(n \geq 2)$

Hromadné body ?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	3	2	5	2	7	2	3	2

Hromadné body = množina všech prvočísel

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = ? = 0$$

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot \dots \cdot n}}_{\leq 1}$$

≤ 1

2 policajti $\quad 0 \leq \dots \leq \frac{1}{n}$