Co je posloupnost? Funkce $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$a(n) = a_n$$

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí : $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n < a_{n+1}$ — $\forall$ rostoucí je neklesající

neklesající : $a_n \leq a_{n+1}$ — $\forall$ klesající je nerostoucí

klesající $a_n > a_{n+1}$

nerostoucí $a_n \geq a_{n+1}$

konstantní $a_n = a_{n+1}$

Určete typ monotonie:

1) $a_n = \sin(n \cdot \pi)$

2) $b_n = 2n + (-1)^n$

3) $c_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

4) $d_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{\underbrace{n^2+2n+2}_{(n+1)^2+1}}}$

a) konstantní

b) neklesající $1, 5, 5, 9, 9 \ldots$

c) $\dfrac{n+1-2}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1}$

$\frac{1}{n}$ – klesající

$\frac{2}{n+1}$ taky klesající

Rostoucí

$1 - \frac{2}{n+1}$ musí být rostoucí (na začátku odečtu nejvíc, pak pořád míň)

– zároveň pro $n=1$ je definováno.

d)

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \overset{?}{<} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1+1}}$$

– proto rostoucí

$\forall a: n_a < n_{a+1}$

$$n \cdot \sqrt{(n+1)^2+1} \overset{?}{<} (n+1) \cdot \sqrt{n^2+1}$$

$$n^2 \cdot ((n+1)^2+1) \overset{?}{<} (n+1)^2 \cdot n^2+1 \qquad n^2(n^2+2) \; ? \; (n^2+1) \cdot (n^2+1)$$

$$n^2 \;?\; (n+1)^2 \qquad n^4 + 2n^2 \;?\; n^4 + n^2 + n^2 + 1$$

$$2n^2 \;?\; 2n^2 + 1$$

Limita posloupnosti (a_n):

$$a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 : |a_n - L| < \varepsilon$$

Určete limitu

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\varepsilon > 0 \quad n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \qquad \frac{1}{\varepsilon^2} < n$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$

Posloupnost A je podposloupností B

- pokud má posloupnost limitu, její podposloupnosti ji mají stejné

Posloupnost C je podposloupnost A.

$$\frac{(n+1)-2}{(n+1)} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

věta o aritmetice limity

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}(1) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\right) \qquad 1 + 0 = \underline{\underline{1}}$$

to je podposloupnost $\frac{1}{n}$

Spočítejte limity posl.

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+1}{n^3-n} = \frac{\lim (2n^2+1)}{\lim (n^3-n)} = \frac{\infty}{\infty}$ není definováno

$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^3}(2n^2+1)}{\frac{1}{n^3}(n^3-n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{0+0}{1-0}$

$\underline{\underline{\lim = 0}}$

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+1}{n^2-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0}{1-0} = \underline{\underline{2}}$

b') $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+1}{n-1} = \frac{2n+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\infty+0}{1-0} = \infty$

$\frac{2+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0}{0-0}$

není definováno

$\frac{3}{2}-\frac{2}{3} = \frac{9}{6}-\frac{4}{6}$

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}} = \lim_{n \to \infty} n^{\frac{5}{6}} = +\infty$ nevlastní limita

proč?

hledám mez pro ε, za kterou to bude vždy

$|a_n - A| < \varepsilon$

$n^{\frac{5}{6}} > K$

$\frac{5}{6} \log n > \log K$

$n > K^{\frac{6}{5}}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n} = \frac{\frac{1}{5^n}(5^n - 3^n)}{\frac{1}{5^n}(5^n + 3^n)} = \frac{1^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

e) $q \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = ? \quad \begin{cases} q > 1 \Rightarrow \lim q^n = +\infty \\ q = 1 \Rightarrow \lim q^n = 1 \\ 0 \leq q < 1 \Rightarrow \lim q^n = 0 \\ -1 < q < 0 \Rightarrow \lim q^n = 0 \\ q \leq -1 \Rightarrow \lim q^n = \text{neexistuje} \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} 0 \leq q < 1 \\ -1 < q < 0 \end{matrix}\right\} q \in (-1, 1)$

začne to lumitat na sudých a lichých číslech. Tedy sudá a lichá podposloupnost má odlišnou limitu.