Porovnejte množiny (inkluzí, mohutností):

$A = \{M \mid M \subseteq \mathbb{N}\} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ / nespočetná

$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{M \mid M \subseteq \{1, 2, \dots, n\}\}$ / spočetná
" postupně přidáním konečné množiny.

$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \binom{\mathbb{N}}{k}$ / taky spočetná, protože i B, a skoro se neliší,

$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \binom{\mathbb{R}}{k}$ / tady taky chybí prázdná množina

/ určitě je nespočetná, protože už jen jednoprvkových množin je tam $|\mathbb{R}|$.

$|B| = |C|$, jelikož se liší o jeden prvek, což u nekonečných množin nevadí.

A skoro jako C, jen C nemá $\emptyset$

$C \subsetneq A$

$C \subsetneq D$

$B \subsetneq A$

/ žádná nekonečná množina nebude v B, tedy v B chybí $\mathbb{N}$., protože B je generovaná konečnou množinou.

$C \subseteq B$

V C jen chybí prázdná množina.

Pro následující množiny najděte: Suprema / Infima, Maxima / Minima:

$A = \{\sin(x),\ x \in (0, \pi)\}$

$B = \{a^2 - b^2,\ a, b \in \mathbb{N},\ a > b\}$

$C = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 2\}$

$C' = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq 2\}$

$\inf C' = \inf C$, $\sup C' = \sup C$, $\min C' =$ „není", $\max C' =$ „není"

$\max A = 1 = \sup A$

$\inf A = 0$, $\min A =$ „není"

$\max B =$ „není" $\sup B =$ „není" $(+\infty)$

$\min B = 3$ $\inf B = 3$

$\max C = \sqrt{2}$ $\sup C = \sqrt{2}$

$\min C = -\sqrt{2}$ $\inf C = -\sqrt{2}$

$\rightarrow \sqrt{2}$ není součástí $\mathbb{Q}$.

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, existují $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$, $\inf B$

a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

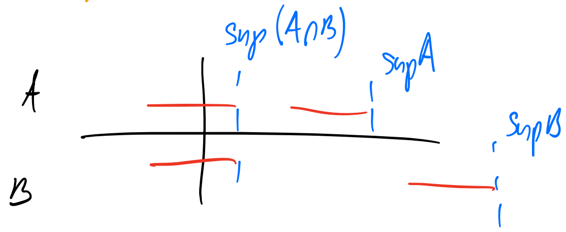
$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

b) $A \cap B \neq \emptyset$

→ pokud je průnik prázdná množina, pak neexistuje sup/inf

$\sup(A \cap B) \le \min(\sup A, \sup B)$

$\inf(A \cap B) \ge \max(\inf A, \inf B)$



$\Rightarrow \max(\inf A, \inf B) \le \inf(A \cap B) \le \sup(A \cap B) \le \min(\sup A, \sup B)$

c) $A \setminus B \neq \emptyset$

$\inf A \le \inf(A \setminus B) \le \sup(A \setminus B) \le \sup A$

$\sup B < \sup A \Rightarrow \sup(A \setminus B) = \sup A$

? $\sup A = \sup B = \sup(A \setminus B)$

↘ $\langle 0, 1 \rangle \setminus (0, 1) = \{0, 1\}$

d) $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

$\inf(A - B) = \inf A + \inf B$

$\forall a \in A: a \le \sup A$

$\forall b \in B: b \le \sup B$

Dk: $\forall a \in A, \forall b \in B: a + b \le \sup A + \sup B$

↑

$s' < \sup A + \sup B$

$0 < (\sup A + \sup B) - s' = \varepsilon$

$\exists a' \in A: a' > s_A - \varepsilon/2$

$\exists b' \in B: b' > s_B - \varepsilon/2$

$a' + b' > s_A + s_B - \varepsilon$

$a' + b' > s'$ $\boxed{\lightning}$

ukážu, že pak existuje i prvek, který by měl být nad tou horní závorou, což je spor.

e) $A \cdot B = \{ a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B \}$

$$\sup(A \cdot B) = \max(S_A \cdot S_B,\ I_A \cdot I_B,\ S_A \cdot I_B,\ S_B \cdot I_A)$$

→ zmínila to mohou přetáčet, když jedna množina je záporná, nebo i obě...