Spočtěte limitu:

$(m, n \in \mathbb{N})$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \underset{L'H\ \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x^m-1)'}{(x^n-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{m\cdot x^{m-1}}{n\cdot x^{n-1}} \overset{AL}{=} \frac{m}{n}\cdot \lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}}{x^{n-1}} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{1} = \frac{m}{n}$$

Vyšetřete funkci:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

$D(f)$: $x^3 - 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{D(f): \mathbb{R}\setminus\{1\}}$

$x \neq 1$

Průsečíky os:

y: $\frac{0-1}{0-1} = 1$

x: $\frac{x^2-1}{x^3-1} = 0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x+1) = 0$ → jen tehdy, když jmenovatel $= 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = 1$ → zakázáno

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{2}{3}$$

spojité dodefinování → $g(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

$$f(x) = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$$

Tohle je předpis g, který obsahuje i „1", která do f nepatří.

(pak stačí derivovat g)

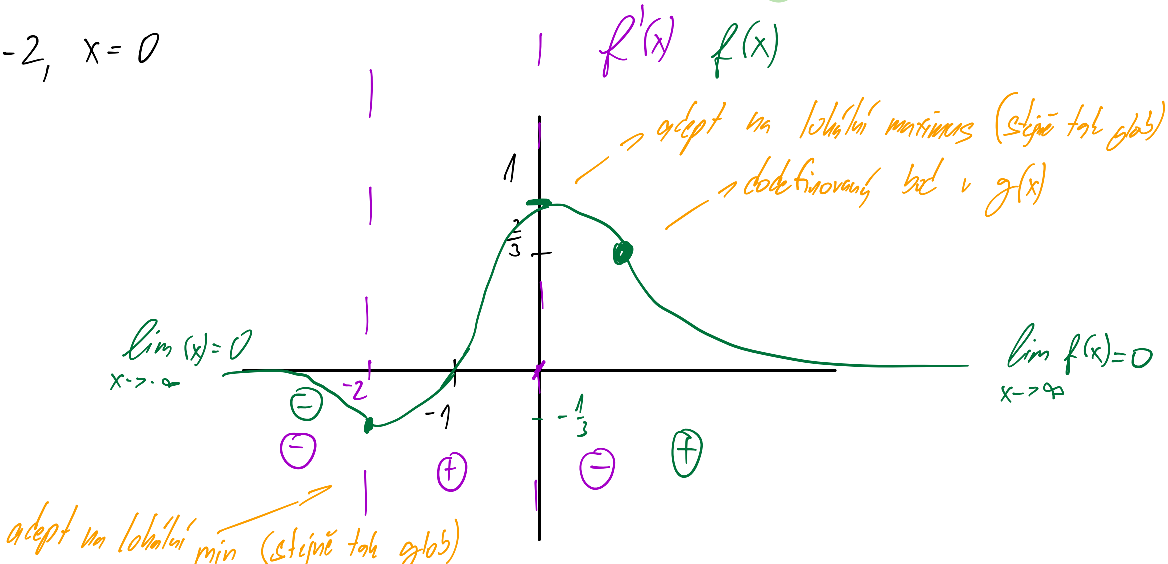
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} \overset{AL}{=} \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1} = \dots = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{-0}{1} = 0$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x^2+x-2) = (x-1)^2\cdot(x+2)$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^3-1) - (x^2-1)\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{2x^4 - 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{x\cdot(-x^3+3x-2)}{(x^3-1)^2} = \frac{-x\cdot(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ pro $x = -2$, $x = 0$



Taylorův polynom (a aproximace)

$p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 5$

$p'(x) = 3x^2 - 2x - 4$

$p''(x) = 6x - 2$

$p'''(x) = 6$

$$T_3^{p,0}(x) = 5 - 4x - x^2 + x^3$$

→ rozvinutí v bodě 0

→ rozvinutí v bodě 1

$$T_3^{p,1}(x) = 1 - 3(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3$$

$x^3 - x^2 - 4x + 5 = 0$

$$T_n^{e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Nalezněte Taylorův polynom

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\qquad T_n^{f,0}(x) = ?$

→ derivace vnitřní funkce $(1-x)' = -1 \cdot -1 = 1$

$f'(x) = \frac{0-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$T_n^{f,0}(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$

$$T_n^{f,0}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

→ konverguje $\frac{1}{1-x}$ na int $(-1,1)$

$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Nalezněte Taylorův polynom:

→ rozvinutí v bodě „1"

$$T_n^{\ln x,1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln x)'' = \frac{-1}{x^2}$

$(\ln x)''' = \frac{2}{x^3}$

$(\ln x)^{i} = \frac{(-1)^{k-1}(i-1)!}{x^i}$