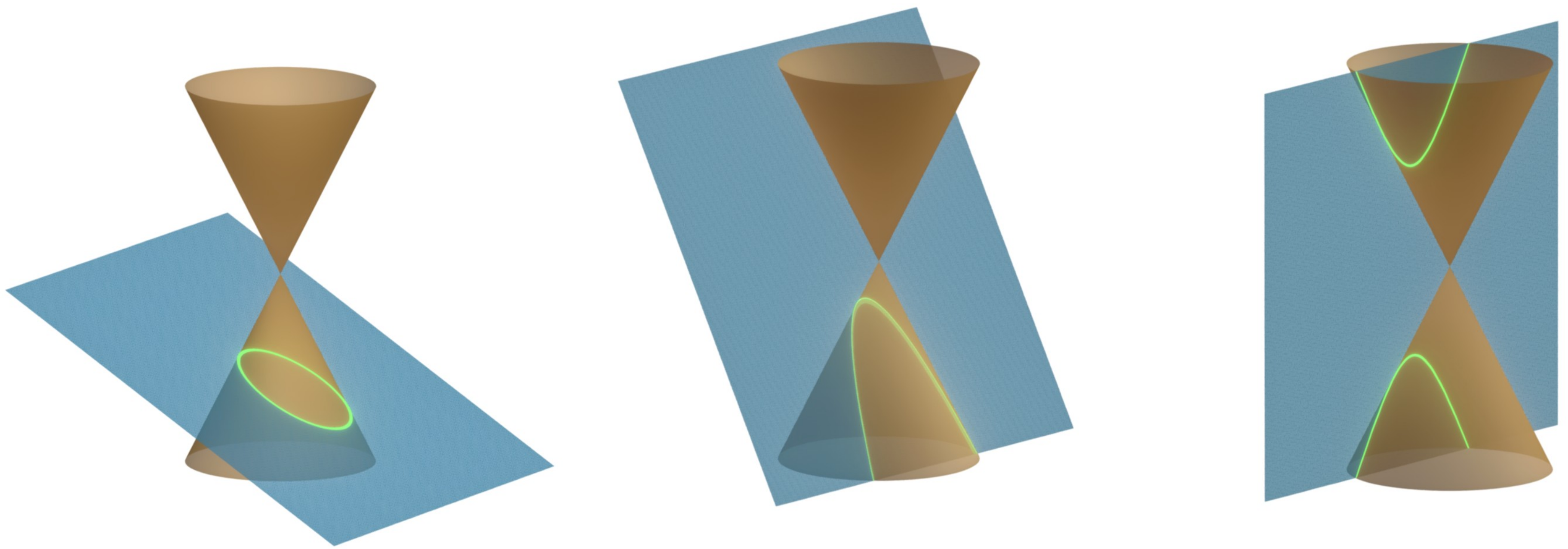
Kuželosečky a kvadriky

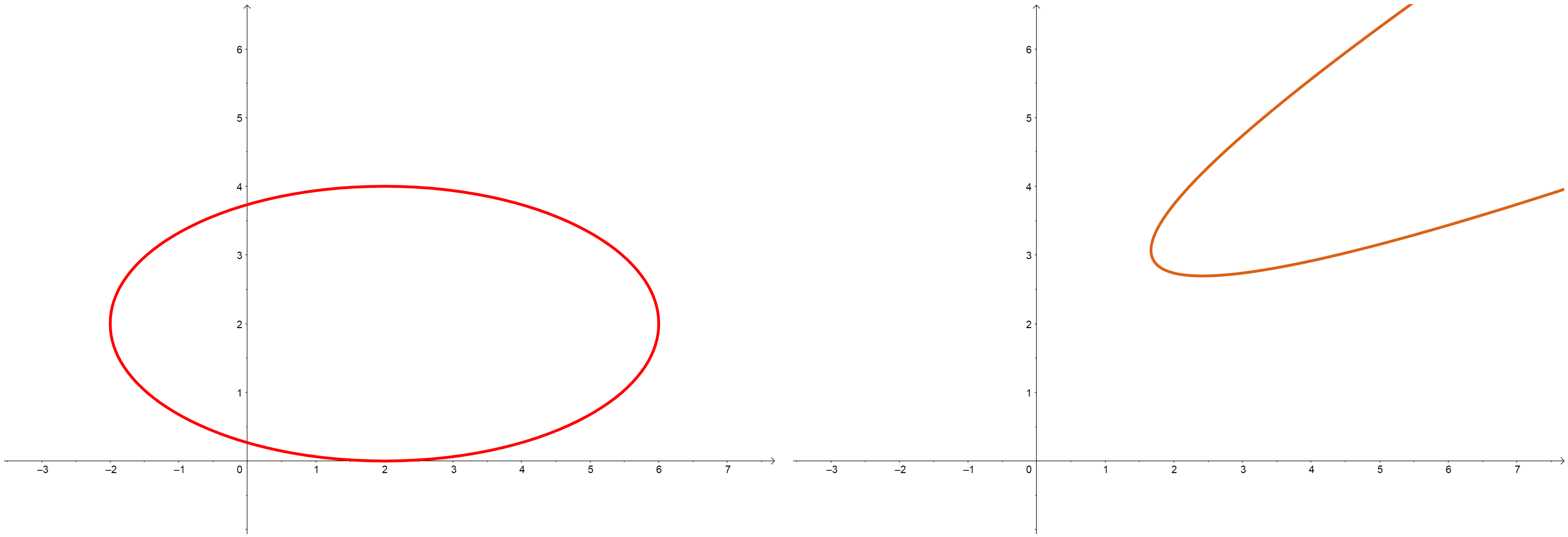
[Wiki:] *„Kuželosečka je rovinná křivka, která vznikne jako průnik roviny s rotační kuželovou plochou“*



Obr: en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

Kuželosečky a kvadriky

Definice: *Kuželosečka* je množina řešení homogenní rovnice s reálným polynomem stupně dva ve dvou proměnných, neboli:
$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0\}$



Vlevo: $(x-2)^2 + 4(y-2)^2 = 16$ ... elipsa

Vpravo: $2x^2 - 8xy + 8y^2 + (8\sqrt{5} - 4)x - (16\sqrt{5} + 2)y + 50 = 0$
... elipsa ? parabola ? hyperbola

Obr: `www.geogebra.org/graphing`

Kuželosečky a kvadriky

Definice: *Kuželosečka* je množina řešení homogenní rovnice s reálným polynomem stupně dva ve dvou proměnných, neboli:
$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0\}$
Stejná rovnice zapsaná pomocí matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a vektoru $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$:

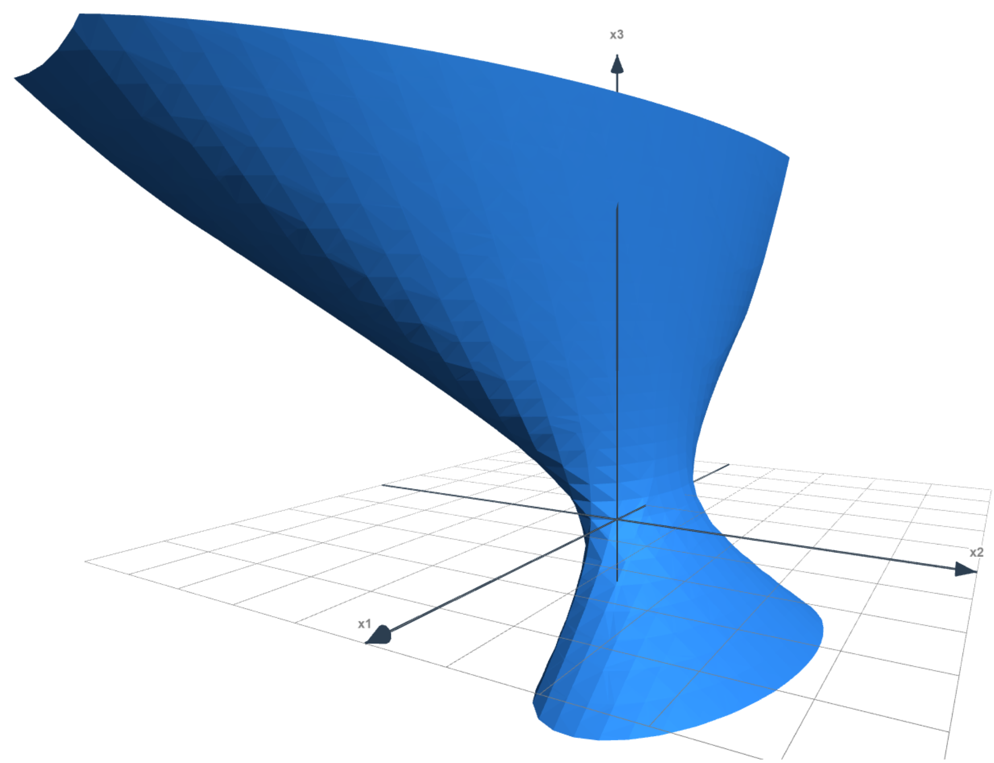
$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c = 0$$

(Buď volíme $a_{2,1} = 0$ nebo koeficient u x_1x_2 rozdělíme symetricky.)
Definice: Pro matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ a skalár $c \in \mathbb{R}$ je *kvadrika* množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c = 0\}$.

V nedegenerovaném případě dostaneme $(d-1)$-dimenzionální plochu v prostoru dimenze d.

$$x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3 = 0$$

Obr: `www.math3d.org`



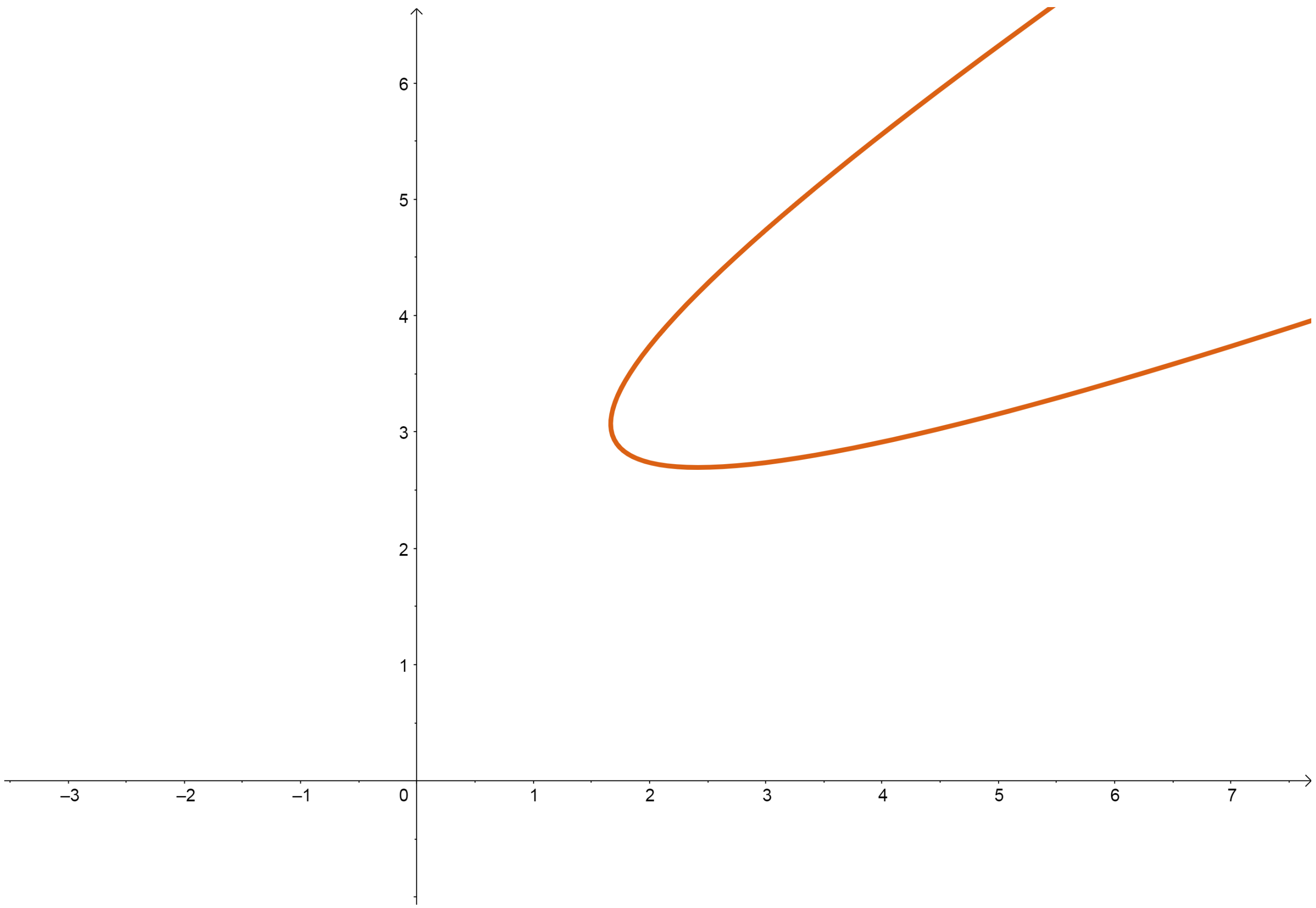
Aplikace

- pohyb planet v astronomii — elipsy
- konstrukce optických zrcadel a mikrofonů
  — parabolické plochy
- lineární programování — elipsoidová metoda
- fyzika — výpočet napětí uvnitř tělesa nebo
  popis rotačního pohybu tuhých těles (např. gyroskopy)
- statistika — analýza hlavních komponent např. pro snížení velikosti velkých souborů dat bez významné ztráty dat
- informatika — rozpoznávání vzorů, neuronové sítě
- elektronika — návrh a analýza chování obvodů
- aritmetika, teorie čísel, . . .

Transformace kvadriky

- Dána $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c = 0$ se symetrickou $\boldsymbol{A}$ vůči bázi X.
- Najdeme bázi Y, aby $[id]_{Y,X}$ byla unitární a $\boldsymbol{A}' = [id]_{Y,X}^T \boldsymbol{A}[id]_{Y,X}$ byla diagonální.
- Provedeme (první) substituci $\boldsymbol{x} = [id]_{Y,X}\boldsymbol{y}$, čímž dostaneme $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}'^T \boldsymbol{y} + c' = 0$ pro $\boldsymbol{b}' = [id]_{Y,X}\boldsymbol{b}$ a $c = c'$.
  Geometricky jde o izometrii, čili natočení systému souřadnic.
- Pro každé $a'_{i,i} \neq 0$ nahradíme (podruhé) $y_i = z_i - \frac{b'_i}{2a'_{i,i}}$.
  Jde o takový posun počátku souřadnicového systému, že
  $a'_{i,i}y_i^2 + b'_i y_i = a'_{i,i}\left(z_i - \frac{b'_i}{2a'_{i,i}}\right)^2 - b'_i\left(z_i - \frac{b'_i}{2a'_{i,i}}\right) = a'_{i,i}z_i^2 - \frac{b_i'^2}{4a'_{i,i}}$
  čili nenulové kvadratické členy pohltí své lineární členy.
  Dostaneme $\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{A}''\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}''^T \boldsymbol{z} + c'' = 0$ kde $\boldsymbol{A}'' = \boldsymbol{A}'$,
  $$b''_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } a''_{i,i} \neq 0 \\ b'_i & \text{pro } a''_{i,i} = 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad c'' = c' - \sum_{a''_{i,i} \neq 0} \frac{b_i^2}{4a_{i,i}}.$$
- Nyní snáze odvodíme tvar, osy, střed a další parametry.

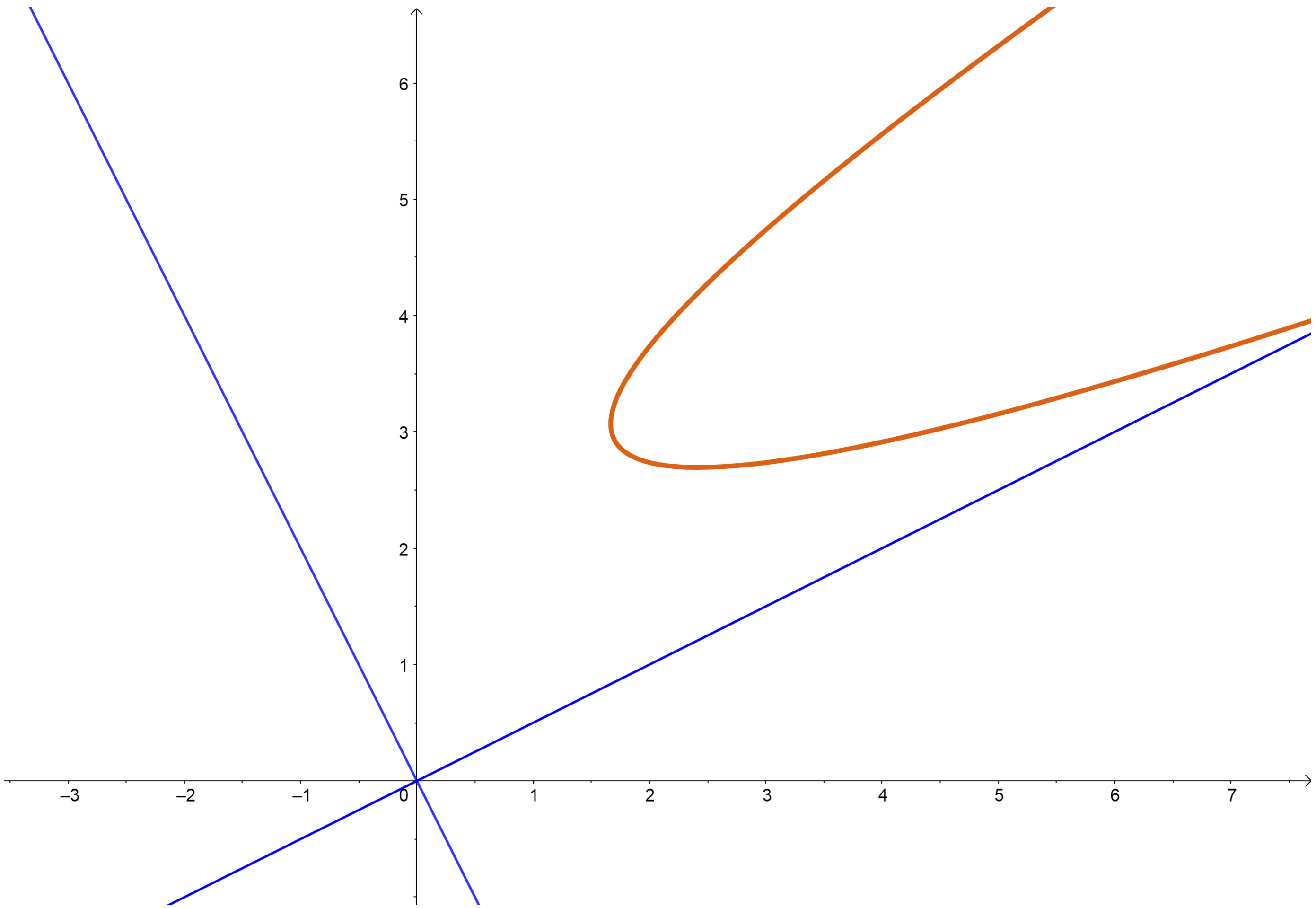
Ukázka transformace



$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0$$

Diagonalizujeme matici $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ pro nalezení nové báze.

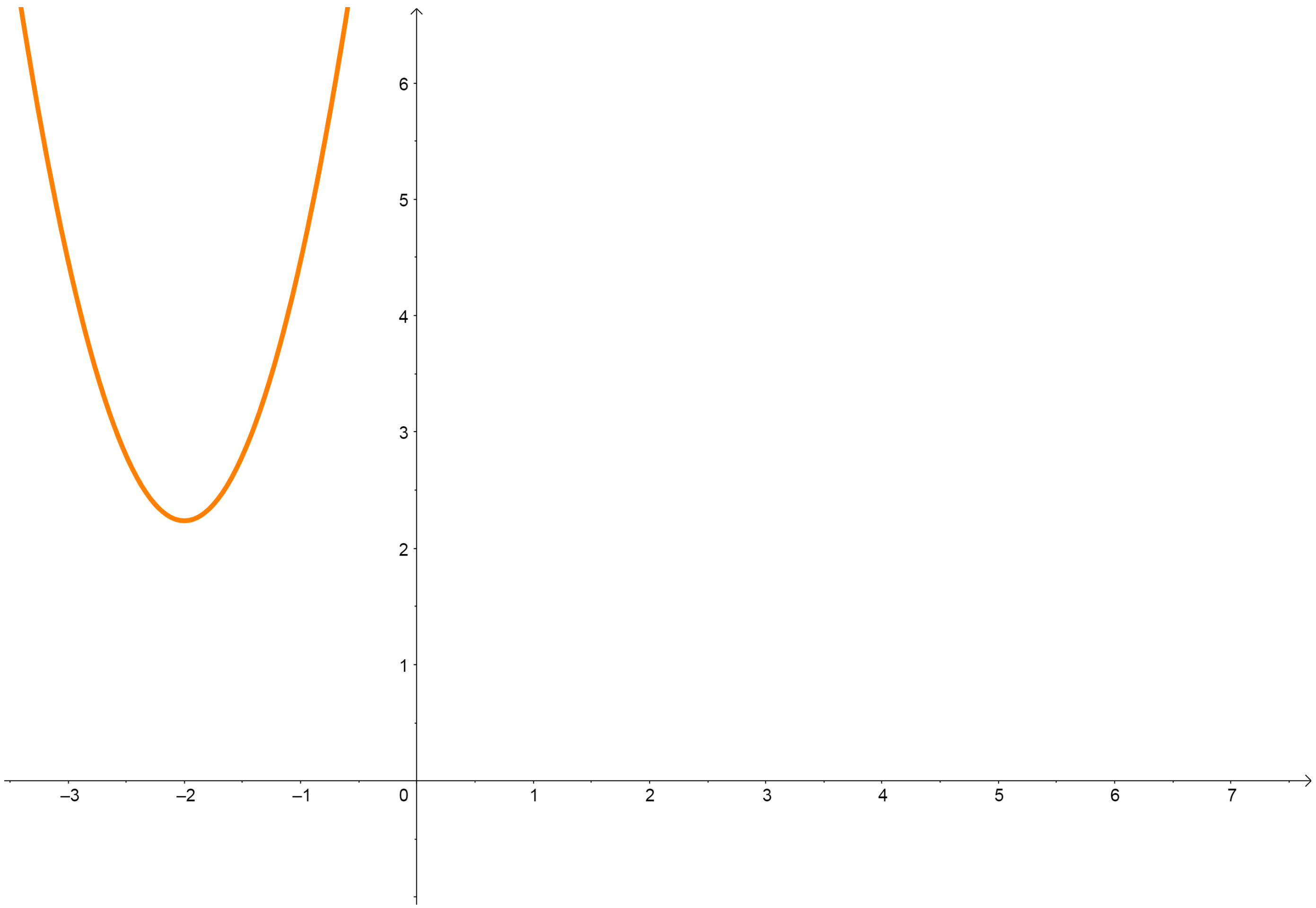
Ukázka transformace



Třeba použít ortonormální $[id]_{Y,X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$,

abychom provedli pouze izometrii (rotaci os)

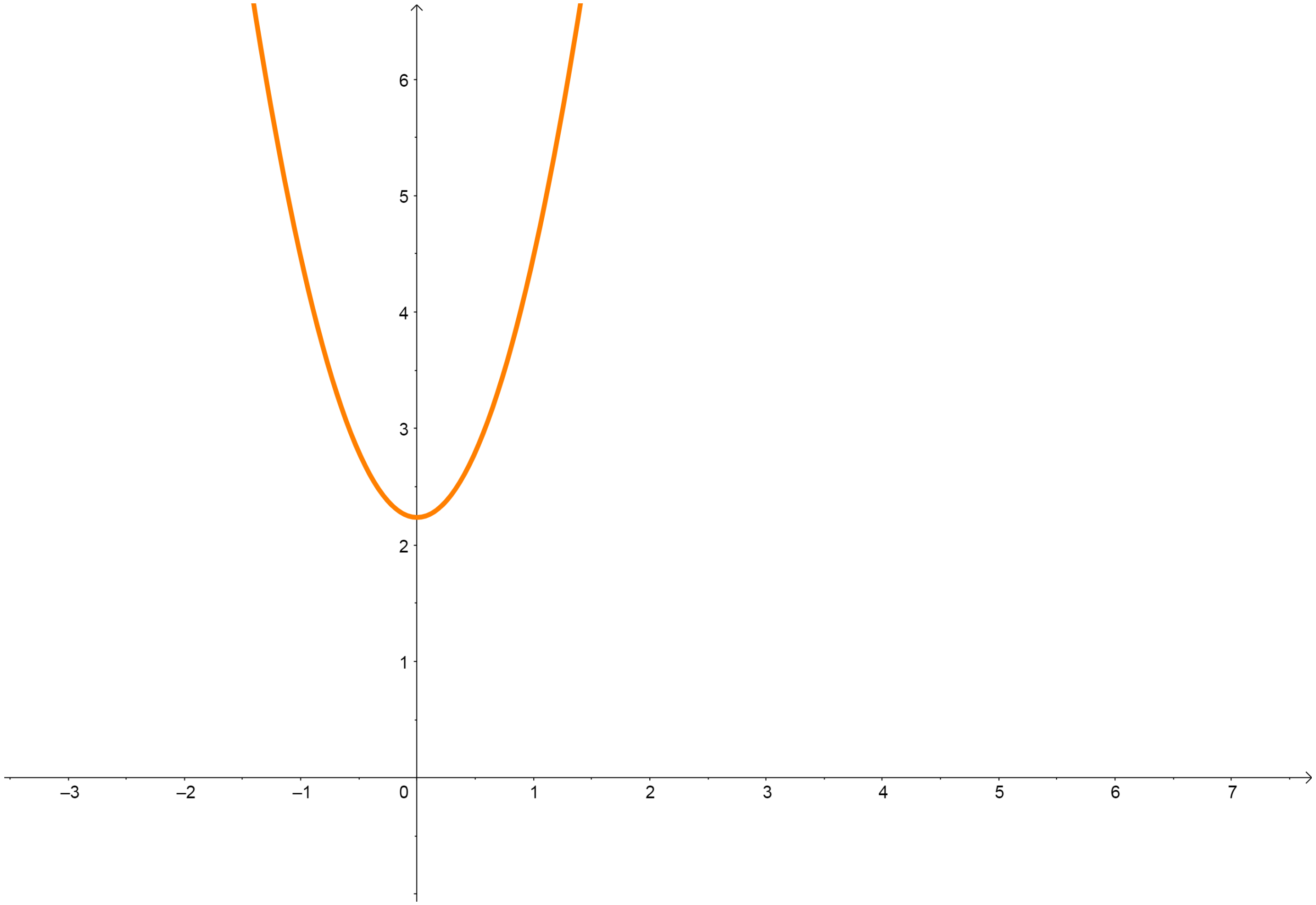
Ukázka transformace



$$10y_1^2 - 2\sqrt{5}y_2 + 40y_1 + 50 = 0$$

Provedeme substituci $y_1 = z_1 - 2$, $y_2 = z_2$ (horizontální posun)

Ukázka transformace



Výsledná parabola: $10z_1^2 - 2\sqrt{5}z_2 + 10 = 0$

(Ještě lze provést svislý posun do počátku.)