Bilineární a kvadratické formy

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a nechť zobrazení $f : V \times V \to \mathbb{K}$ splňuje:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, \forall a \in \mathbb{K} : f(a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}, a\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V : f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V : f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$

Poté se f nazývá *bilineární forma* na V.

Bilineární forma je *symetrická*, když $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$.

Zobrazení $g : V \to \mathbb{K}$ se nazývá *kvadratická forma*, pokud existuje bilineární forma f taková, že $g(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ pro všechny $\boldsymbol{u} \in V$.

Příklady: Každý skalární součin na prostoru nad $\mathbb{R}$, *ale ne nad* $\mathbb{C}$!

Pro $V = \mathbb{Z}_5^2$, bilineární forma:

$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 4u_2 v_1 + 3u_2 v_2$

Odpovídající kvadratická forma:

$g(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = u_1 u_1 + 2u_1 u_2 + 4u_2 u_1 + 3u_2 u_2 = u_1^2 + u_1 u_2 + 3u_2^2$

Matice forem

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ s bazí $X = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$. *Matice bilineární formy f vzhledem k bázi X* je matice $\boldsymbol{B}$ definovaná $b_{i,j} = f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$.
Matice kvadratické formy g je matice symetrické bilineární formy f odpovídající g, pokud taková symetrická f existuje.
Příklad: Pro $V = \mathbb{Z}_5^2$ a kanonickou bázi K má bilineární forma
$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 4u_2 v_1 + 3u_2 v_2$ matici $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
a $g(\boldsymbol{u}) = u_1^2 + u_1 u_2 + 3u_2^2$ má matici $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Na $V = \mathbb{Z}_2^2$ odpovídá kvadratické formě $g(\boldsymbol{u}) = u_1 u_2$ např. bilineární forma s maticí $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ale žádná symetrická.

Matice forem

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ s bazí $X = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$. *Matice bilineární formy f vzhledem k bázi X* je matice $\boldsymbol{B}$ definovaná $b_{i,j} = f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$.
Matice kvadratické formy g je matice symetrické bilineární formy f odpovídající g, pokud taková symetrická f existuje.

Pozorování: $b_{i,j} = f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \frac{1}{2}(g(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j) - g(\boldsymbol{v}_i) - g(\boldsymbol{v}_j))$

Důkaz: $g(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j) = f(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j)$
$= f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) + f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) + f(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i) + f(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j)$
$g(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j) - g(\boldsymbol{v}_i) - g(\boldsymbol{v}_j) = f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) + f(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)$

Pozorování: Použití matic forem:

$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = [\boldsymbol{u}]_X^T \boldsymbol{B} [\boldsymbol{w}]_X, \quad g(\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{u}]_X^T \boldsymbol{B} [\boldsymbol{u}]_X.$$

Důkaz: Když $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^n b_j \boldsymbol{v}_j$, pak

$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n b_j \boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) b_j = [\boldsymbol{u}]_X^T \boldsymbol{B} [\boldsymbol{w}]_X$$

Pozorování: Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice b/k formy vzhledem k bázi X. Potom $[id]_{YX}^T \boldsymbol{B}[id]_{YX}$ je matice stejné formy vzhledem k Y.

Důkaz: $[\boldsymbol{u}]_X = [id]_{YX}[\boldsymbol{u}]_Y$, $[\boldsymbol{w}]_X = [id]_{YX}[\boldsymbol{w}]_Y$,

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = [\boldsymbol{u}]_X^T \boldsymbol{B}[\boldsymbol{w}]_X &= ([id]_{YX}[\boldsymbol{u}]_Y)^T \boldsymbol{B}[id]_{YX}[\boldsymbol{w}]_Y \\
&= [\boldsymbol{u}]_Y^T [id]_{YX}^T \boldsymbol{B}[id]_{YX}[\boldsymbol{w}]_Y.
\end{aligned}
$$

Definice: *Analytické vyjádření* bilineární formy f nad $\mathbb{K}^n$ s maticí $\boldsymbol{B}$ je homogenní polynom

$$
f((x_1, \ldots, x_n)^T, (y_1, \ldots, y_n)^T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_i y_j
$$

...analogicky pro kvadratické formy a/nebo vzhledem k bázi X.

Diagonalizace forem

Věta: Pokud je g kvadratická forma na vektorovém prostoru V konečné dimenze n nad tělesem $\mathbb{K}$ jiné charakteristiky než 2, pak má forma g diagonální matici $\boldsymbol{B}$ vzhledem k vhodné bázi X.

(platí i pro symetrické bilineární formy)

Přeformulováno z hlediska matic:
Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Porovnejte s diagonalizací symetrických *reálných* matic lineárních zobrazení — tam $\boldsymbol{R}$ může být dokonce *ortogonální*: $\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^{-1}$, tedy $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$.

Příklad: Matici formy $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nelze diagonalizovat nad $\mathbb{Z}_2$,

ale nad $\mathbb{Z}_3$ lze: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ s $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^T$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n.

Označme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_n = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \boldsymbol{a}^T \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \end{array}\right]$.

Když $\alpha \neq 0$ volíme $\boldsymbol{P}_n = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{array}\right]$.

Pak
$$\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n^T = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \boldsymbol{a}^T \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \boldsymbol{a}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & -\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \tilde{\boldsymbol{A}} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \boldsymbol{0}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{array}\right]$$

kde $\boldsymbol{A}_{n-1} = \tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ je symetrická.

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^T$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n.

Označme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_n = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \boldsymbol{a}^T \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \end{array}\right)$.

Když $\alpha \neq 0$ volíme $\boldsymbol{P}_n = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{array}\right)$. Pak $\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n^T = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{array}\right)$,

kde $\boldsymbol{A}_{n-1}$ je symetrická. Dle indukčního předpokladu existuje $\boldsymbol{R}_{n-1}$ pro $\boldsymbol{A}_{n-1}$. Zvolíme $\boldsymbol{R}_n = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \end{array}\right) \cdot \boldsymbol{P}_n$

Pak $\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n^T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \end{array}\right) \cdot \boldsymbol{P}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n^T \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1}^T \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{R}_{n-1}^T \end{array}\right)$ je diagonální.

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^T$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n.

Označme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_n = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \boldsymbol{a}^T \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \\ \hline \end{array}$.

Když $\alpha \neq 0$ volíme $\boldsymbol{P}_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{I}_{n-1} \\ \hline \end{array}$. Pak $\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n^T = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \\ \hline \end{array}$,

kde $\boldsymbol{A}_{n-1}$ je symetrická. Dle indukčního předpokladu existuje $\boldsymbol{R}_{n-1}$ pro $\boldsymbol{A}_{n-1}$. Zvolíme $\boldsymbol{R}_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \\ \hline \end{array} \cdot \boldsymbol{P}_n$

Potom $\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n^T$ je diagonální.

Příklad: $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$, $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}_2 = \tilde{\boldsymbol{A}} - \tfrac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{R}_3\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{R}_3^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{RAR}^T$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n.

Označme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_n = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \boldsymbol{a}^T \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \end{array}\right]$.

Když $\alpha \neq 0$ volíme $\boldsymbol{P}_n = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{I}_{n-1} \end{array}\right]$. Pak $\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n^T = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{array}\right]$,

kde $\boldsymbol{A}_{n-1}$ je symetrická. Dle indukčního předpokladu existuje $\boldsymbol{R}_{n-1}$ pro $\boldsymbol{A}_{n-1}$. Zvolíme $\boldsymbol{R}_n = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \end{array}\right] \cdot \boldsymbol{P}_n$

Potom $\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n^T$ je diagonální.

Pokud $\alpha = 0$, ale $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, pak $a_{i,1} \neq 0$ pro nějaké i. Použijeme elementární matici $\boldsymbol{E}$ pro přičtení i-tého řádku k prvnímu. Vezmeme $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{EAE}^T$ namísto $\boldsymbol{A}$. Protože $\alpha' = 2a_{i,1} \neq 0$, můžeme postupovat jako v předchozím případu.

Když $\alpha = 0$ a $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, pak vezmeme $\boldsymbol{A}_{n-1} = \tilde{\boldsymbol{A}}$ a $\boldsymbol{R}_n = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \end{array}\right]$.

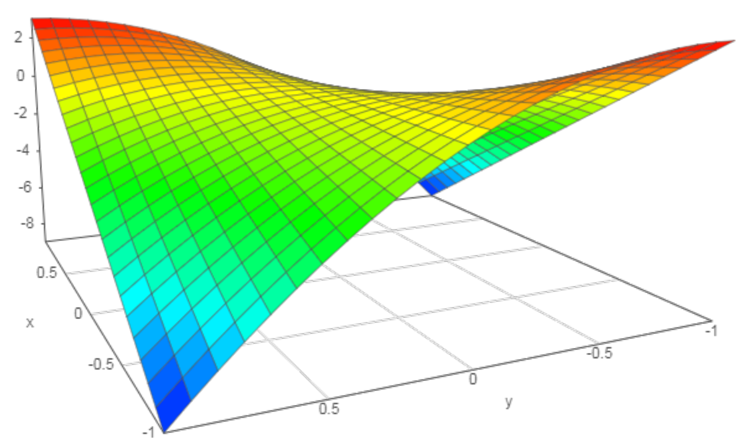
Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1, -1 a 0. Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1.

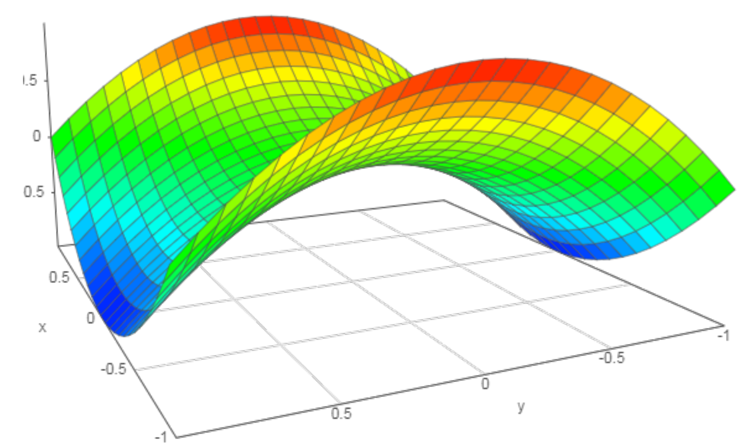
Příklad: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daná $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ vzhledem ke K.

Matice g vzhledem k bázi: $X = \{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T, (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T\}$ je

$$\boldsymbol{B}' = [id]_{XK}^T\, \boldsymbol{B}\, [id]_{XK} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

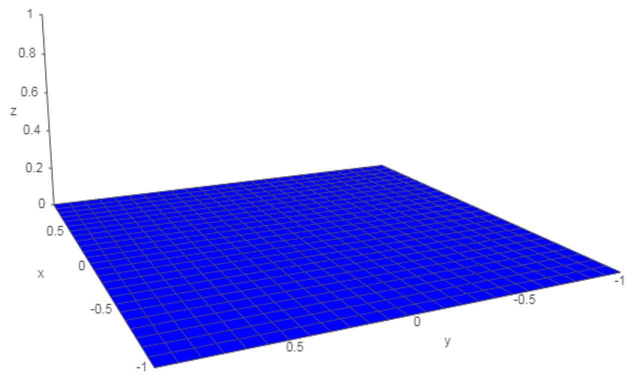


$6x_1x_2 - 3x_2^2$

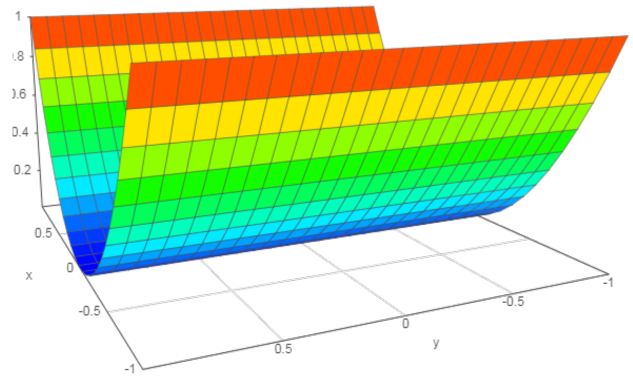


$x_1^2 - x_2^2$

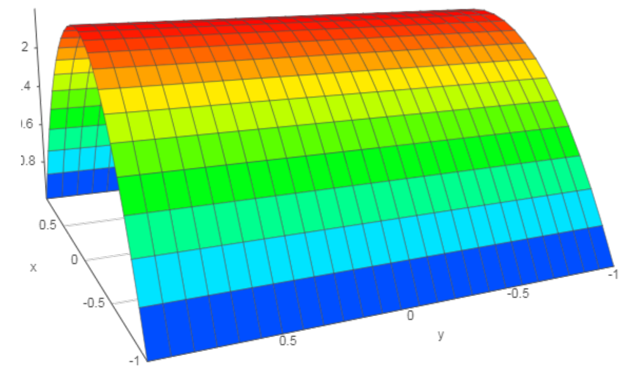
Diagonalizované kvadratické formy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



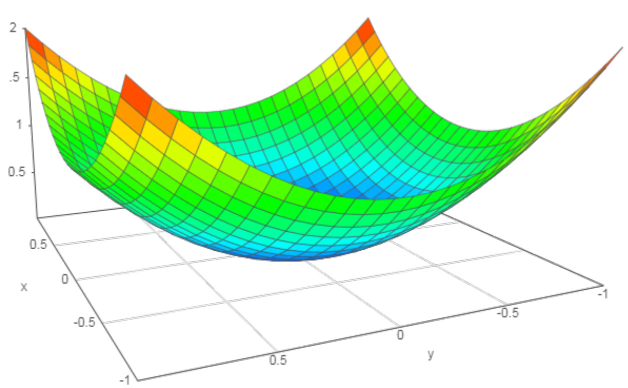
0



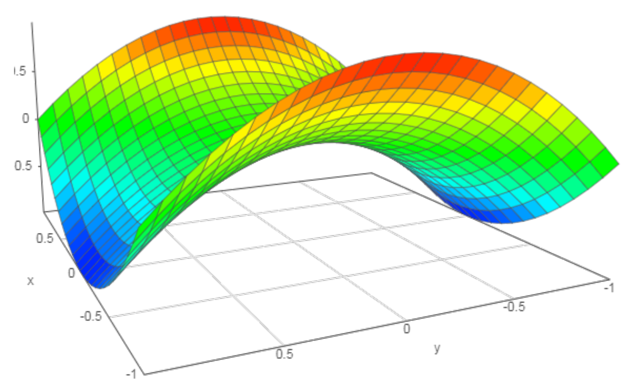
x_1^2



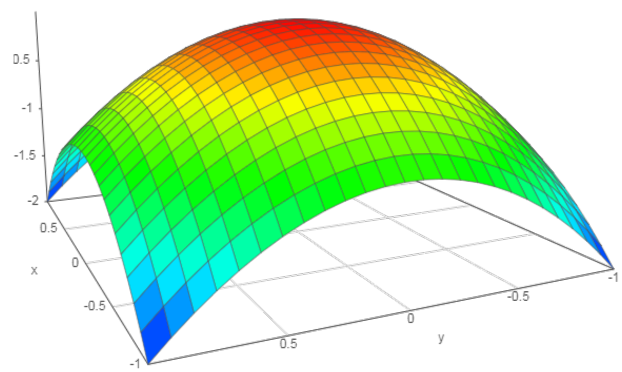
$-x_1^2$



$x_1^2 + x_2^2$



$x_1^2 - x_2^2$



$-x_1^2 - x_2^2$

(seřazeno podle hodnosti a poté 1 před -1)

Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1, -1 a 0. Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1.

Důkaz:

1. Existence: Nechť $\boldsymbol{B}$ je maticí formy vzhledem k nějaké bázi X.
Reálné symetrické matice lze diagonalizovat, neboli
$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{R}$ pro regulární $\boldsymbol{R}$.
Rozložíme $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{D}' \boldsymbol{S}$, kde $d_{i,i} \begin{cases} = 0 & d'_{i,i} = 0. \quad s_{i,i} = 1 \\ > 0 & d'_{i,i} = 1, \quad s_{i,i} = \sqrt{d_{i,i}} \\ < 0 & d'_{i,i} = -1, s_{i,i} = \sqrt{-d_{i,i}} \end{cases}$
Nyní je $\boldsymbol{SR}$ regulární a $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{SR})^T \boldsymbol{D}' \boldsymbol{SR}$.
Zvolíme bázi Y tak, že souřadnice vektorů Y vzhledem k X jsou sloupce $\boldsymbol{SR}$, tzn. $[id]_{YX} = \boldsymbol{SR}$ a také $[id]_{XY} = (\boldsymbol{SR})^{-1}$.
Nyní $[id]_{XY}^T \boldsymbol{B} [id]_{XY} = ((\boldsymbol{SR})^{-1})^T (\boldsymbol{SR})^T \boldsymbol{D}' \boldsymbol{SR} (\boldsymbol{SR})^{-1} = \boldsymbol{D}'$
je hledaná diagonální matice formy.

2. Jednoznačnost počtu 1, -1 (a tedy také 0):
Nechť $X = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$, $Y = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ jsou dvě báze t.ž. odpovídající matice $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}'$ formy g jsou diagonální s 1, -1 a 0 uspořádanými tak, že nejdříve jsou 1, potom -1 a 0 jsou poslední.

Protože součiny s regulárními maticemi $[id]_{XY}$ nemění hodnost:
$\#0 \text{ v } \boldsymbol{B} = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}') = \#0 \text{ v } \boldsymbol{B}'$.

Nechť $r = \#1$ v $\boldsymbol{B}$, $s = \#1$ v $\boldsymbol{B}'$. Pokud $r > s$, pak uvažme podprostory $\mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r)$ a $\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_{s+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n)$. Součet jejich dimenzí $r + n - s$ přesahuje n, mají tedy netriviální průnik.
Zvolme $\boldsymbol{w} \in (\mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r) \cap \mathcal{L}(\boldsymbol{v}_{s+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n)) \setminus \mathbf{0}$, tedy
$[\boldsymbol{w}]_X = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)^T$, $[\boldsymbol{w}]_Y = (0, \dots, 0, y_{s+1}, \dots, y_n)^T$.
Nyní $g(\boldsymbol{w}) = [\boldsymbol{w}]_X^T \boldsymbol{B} [\boldsymbol{w}]_X = x_1^2 + \dots + x_r^2 > 0$ ($>$ plyne z $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$),
ale $g(\boldsymbol{w}) = [\boldsymbol{w}]_Y^T \boldsymbol{B}' [\boldsymbol{w}]_Y = -y_{s+1}^2 - \dots - y_{\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}')}^2 \leq 0$, spor.
Dostáváme $r \not> s$. Symetricky též $s \not> r$, a proto $r = s$.

Poznámky

Pozorování: Formy s *reálnými* pozitivně definitními maticemi jsou ty, které lze diagonalizovat na I_n.

— porovnejte s Choleského faktorizací $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{I}_n \boldsymbol{U}$.

Pozorování: Analogická věta pro *komplexní symetrické* formy (jiné matice než hermitovské!) dává diagonální matice s 1 a 0 na diagonále; včetně setrvačnosti.