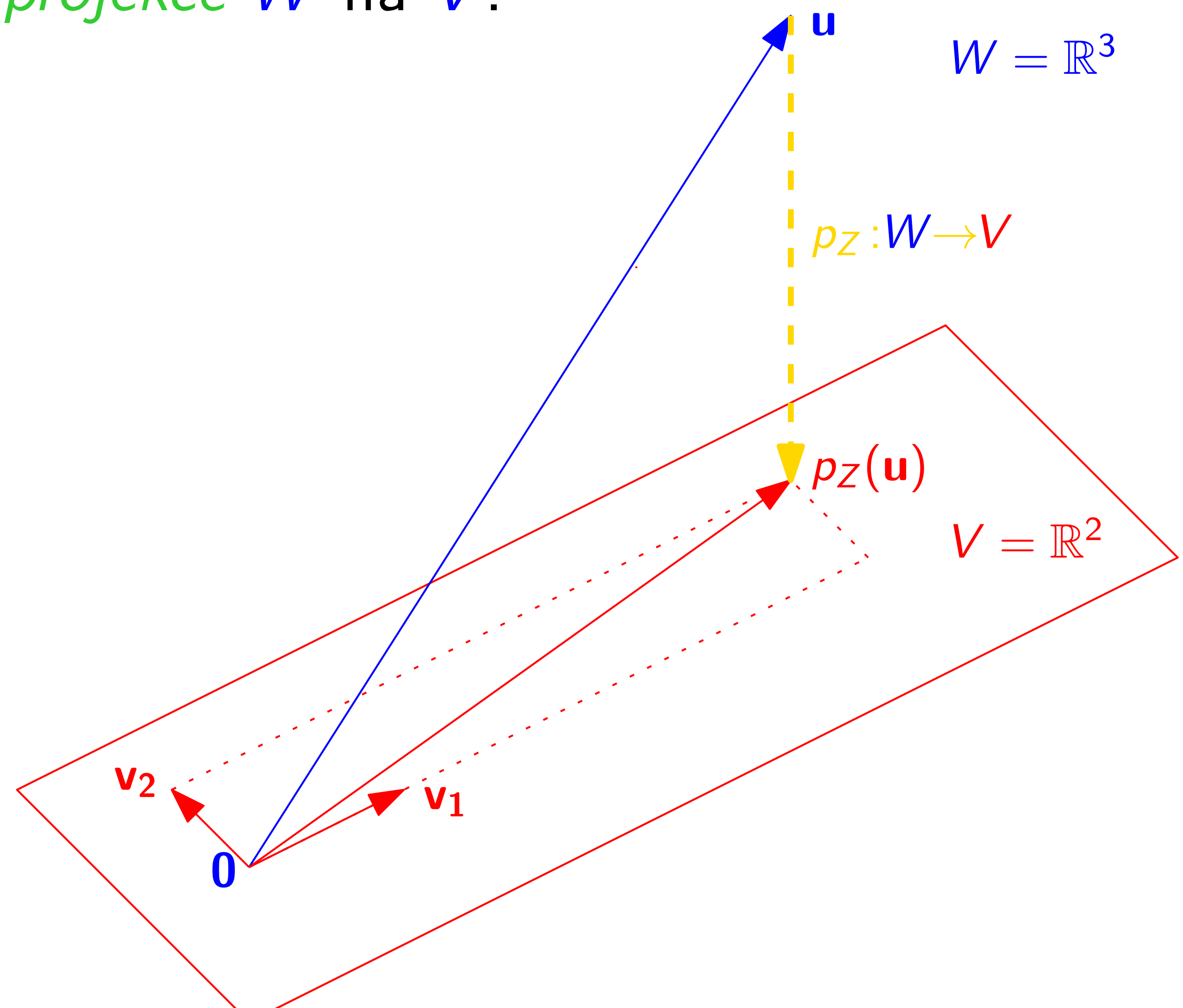
Ortogonální projekce

Definice: Nechť W je prostor se skalárním součinem a V je jeho *podprostor* s ortonormální bazí $Z = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$.

Zobrazení $p_Z : W \to V$ definované $p_Z(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i$ je *ortogonální projekce* W na V.

Příklad:



Pozorování: Ortogonální projekce je lineární zobrazení.

Důkaz:

$$p_Z(a\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \langle a\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}_i\rangle \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} a\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}_i\rangle \boldsymbol{v}_i = a\sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}_i\rangle \boldsymbol{v}_i = ap_Z(\boldsymbol{u})$$

$$p_Z(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}_i\rangle \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}_i\rangle + \langle \boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}_i\rangle)\boldsymbol{v}_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}_i\rangle \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}_i\rangle \boldsymbol{v}_i = p_Z(\boldsymbol{u}) + p_Z(\boldsymbol{w})$$

Pozorování: Ortogonální projekce je lineární zobrazení.

Lemma: Nechť p_Z je ortogonální projekce W na V, potom $\boldsymbol{u} - p_Z(\boldsymbol{u}) \perp \boldsymbol{v}_i$ pro každé $\boldsymbol{v}_i \in Z$.

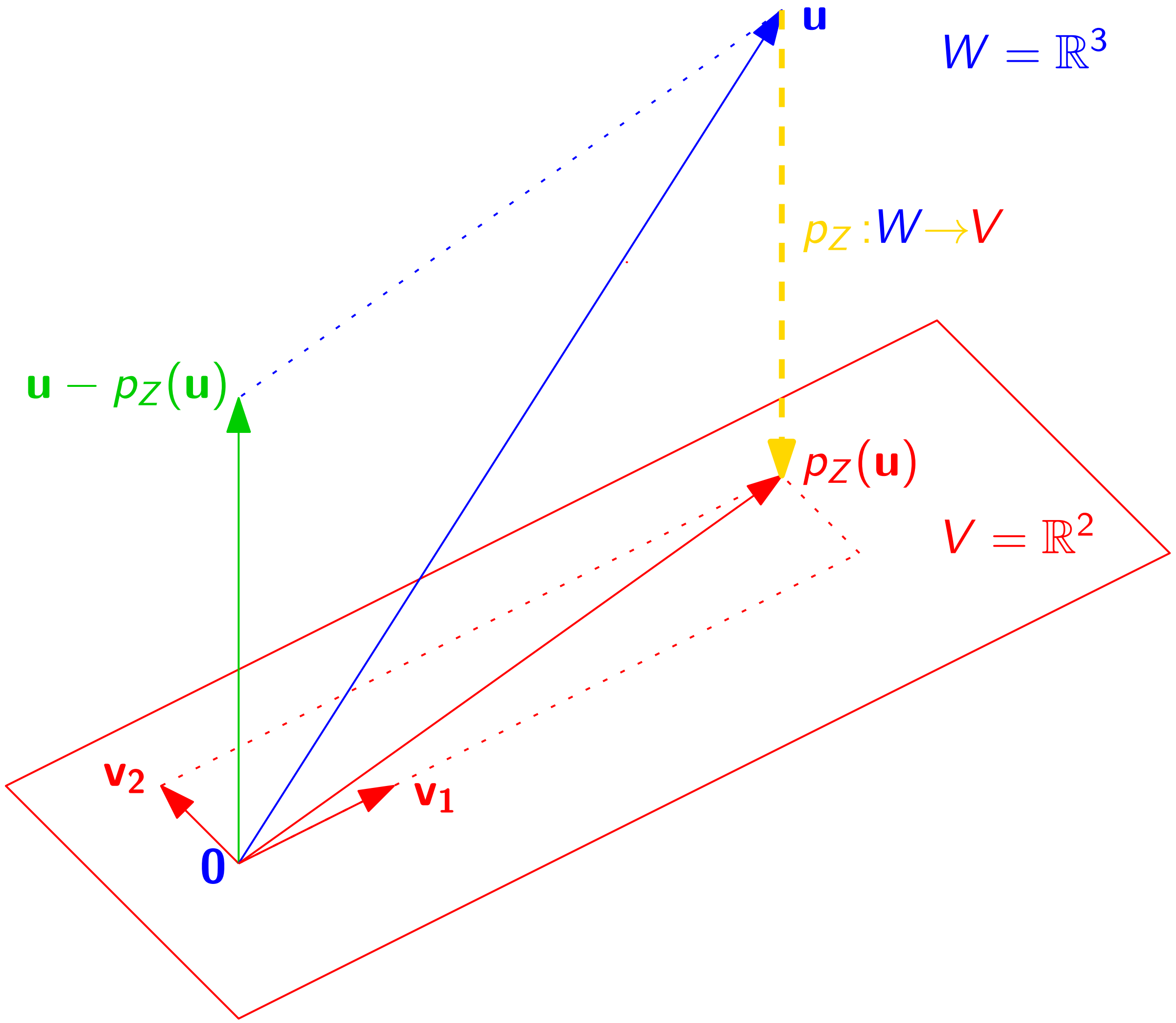
Důkaz:

$$\langle \boldsymbol{u} - p_Z(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{v}_i \rangle =$$

$$\left\langle \boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j \middle| \boldsymbol{v}_i \right\rangle =$$

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_j \rangle \langle \boldsymbol{v}_j | \boldsymbol{v}_i \rangle =$$

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle - \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle = 0$$

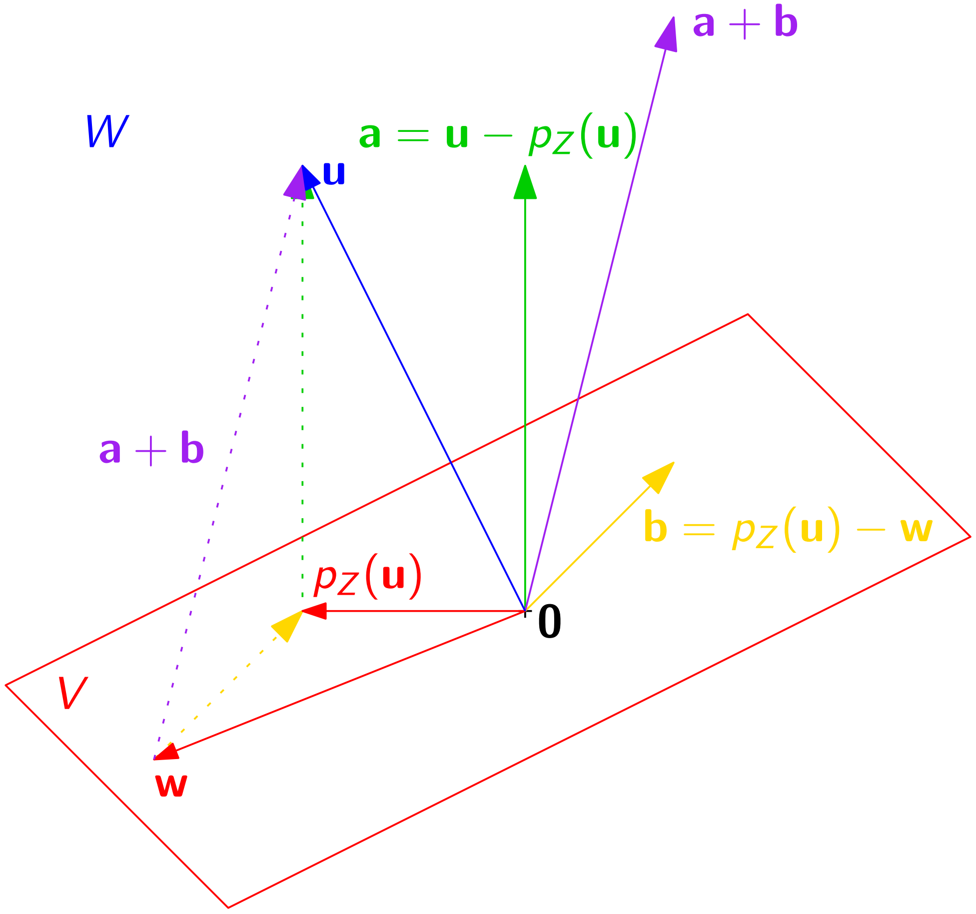


Projekce a vzdálenost

Pozorování: Vektor $p_Z(\boldsymbol{u})$ je vektor z $V = \mathcal{L}(Z)$, který je nejbližší k u v tom smyslu, že minimalizuje $||\boldsymbol{u} - p_Z(\boldsymbol{u})||$.

Důkaz: Pro $\boldsymbol{w} \in V$, $\boldsymbol{w} \neq p_Z(\boldsymbol{u})$
vezměme $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} - p_Z(\boldsymbol{u})$,
$\boldsymbol{b} = p_Z(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$. $\perp$
Protože $\boldsymbol{b} \in V$, máme $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle = 0$.

Nyní: $||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}|| = ||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||$
$$= \sqrt{\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} | \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rangle}$$
$$= \sqrt{\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b} | \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{b} | \boldsymbol{b} \rangle}$$
$$= \sqrt{\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{b} | \boldsymbol{b} \rangle}$$
$$> \sqrt{\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{a} \rangle}$$
$$= ||\boldsymbol{a}|| = ||\boldsymbol{u} - p_Z(\boldsymbol{u})||$$



Důsledek: Zobrazení p_Z nezávisí na volbě báze Z.

Přibližné řešení neřešitelných soustav

Pozorování: Vektor $p_Z(\boldsymbol{u})$ je vektor z $V = \mathcal{L}(Z)$, který je nejbližší k u v tom smyslu, že minimalizuje $||\boldsymbol{u} - p_Z(\boldsymbol{u})||$.

Pokud soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nemá řešení, tj. když $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{S}(\boldsymbol{A})$, pak můžeme promítnout $\boldsymbol{b}$ do $\mathcal{S}(\boldsymbol{A})$ a získat $\boldsymbol{b}'$.

Soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}'$ má nyní řešení. V důsledku pozorování takové $\boldsymbol{x}$ minimalizuje chybu $||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'|| = ||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}||$.

To je princip tzv. *metody nejmenších čtverců*.

Gram-Schmidtova ortonormalizace

Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n)$:

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end

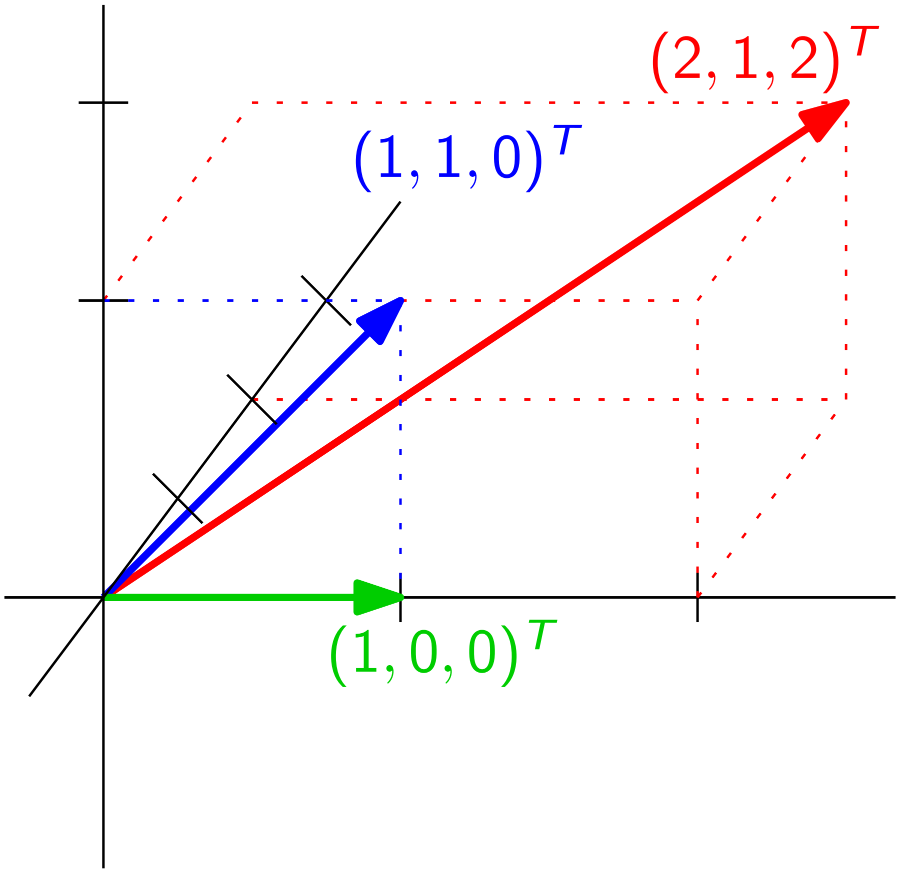
Gram-Schmidtova ortonormalizace — ukázka

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end



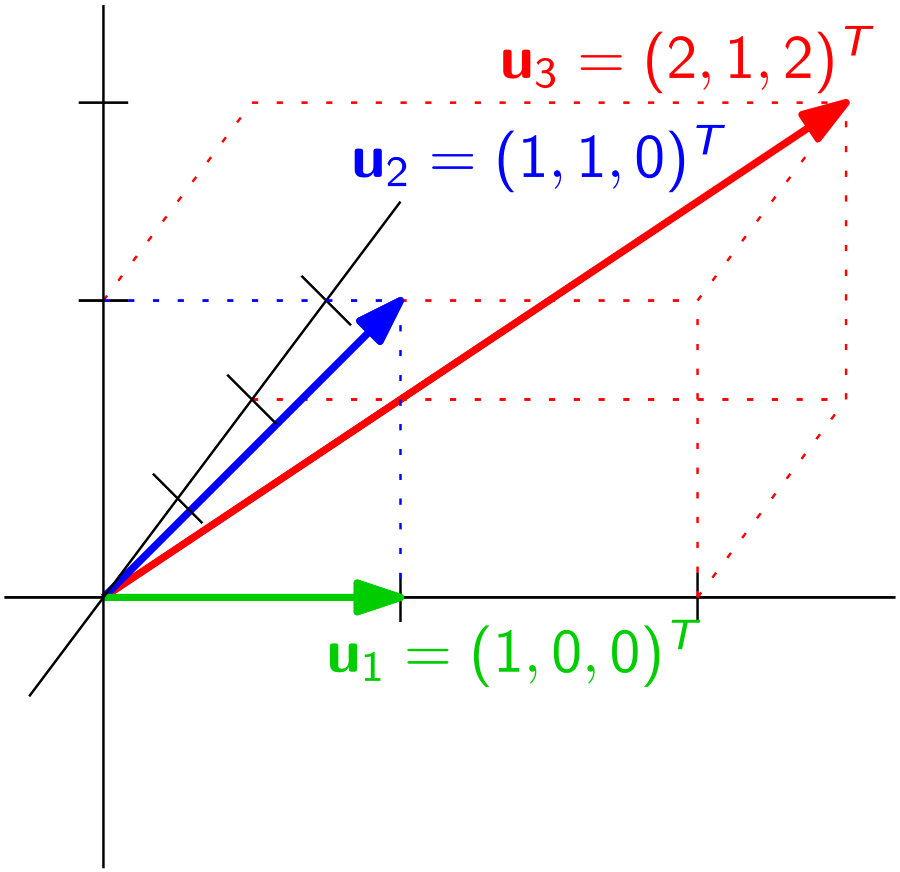
Gram-Schmidtova ortonormalizace — ukázka

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end



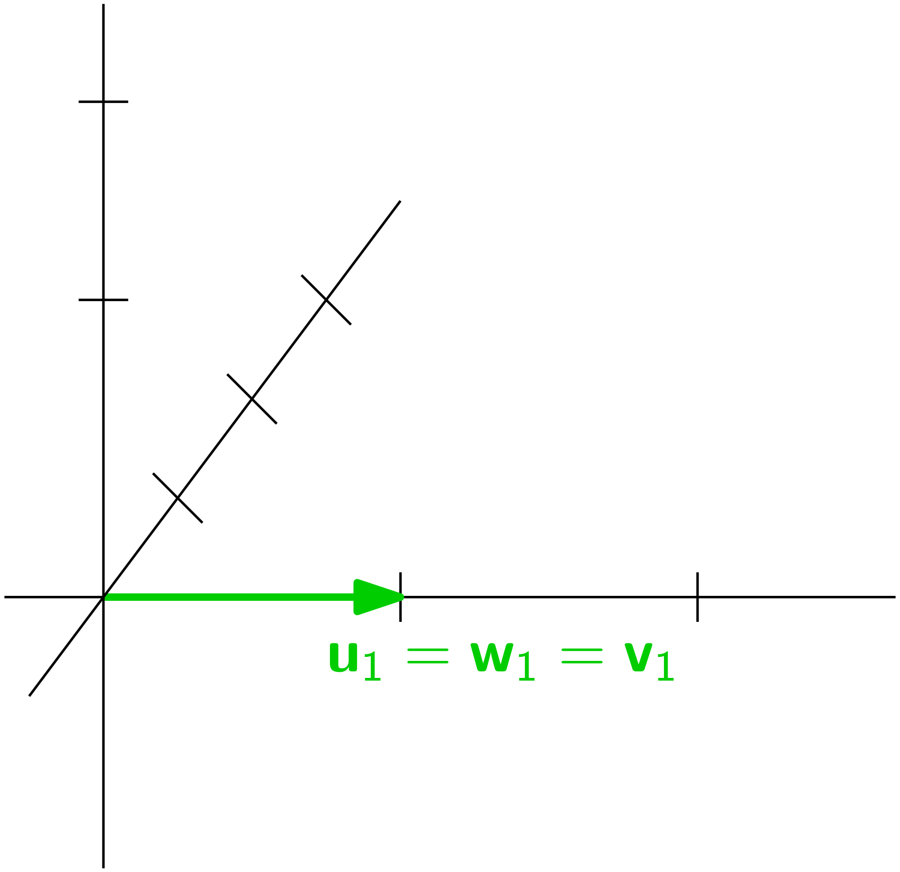
Gram-Schmidtova ortonormalizace — ukázka

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end



$i = 1:$

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \sum_{j=1}^{0} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_1||} \boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{1}(1, 0, 0)^T = (1, 0, 0)^T$$

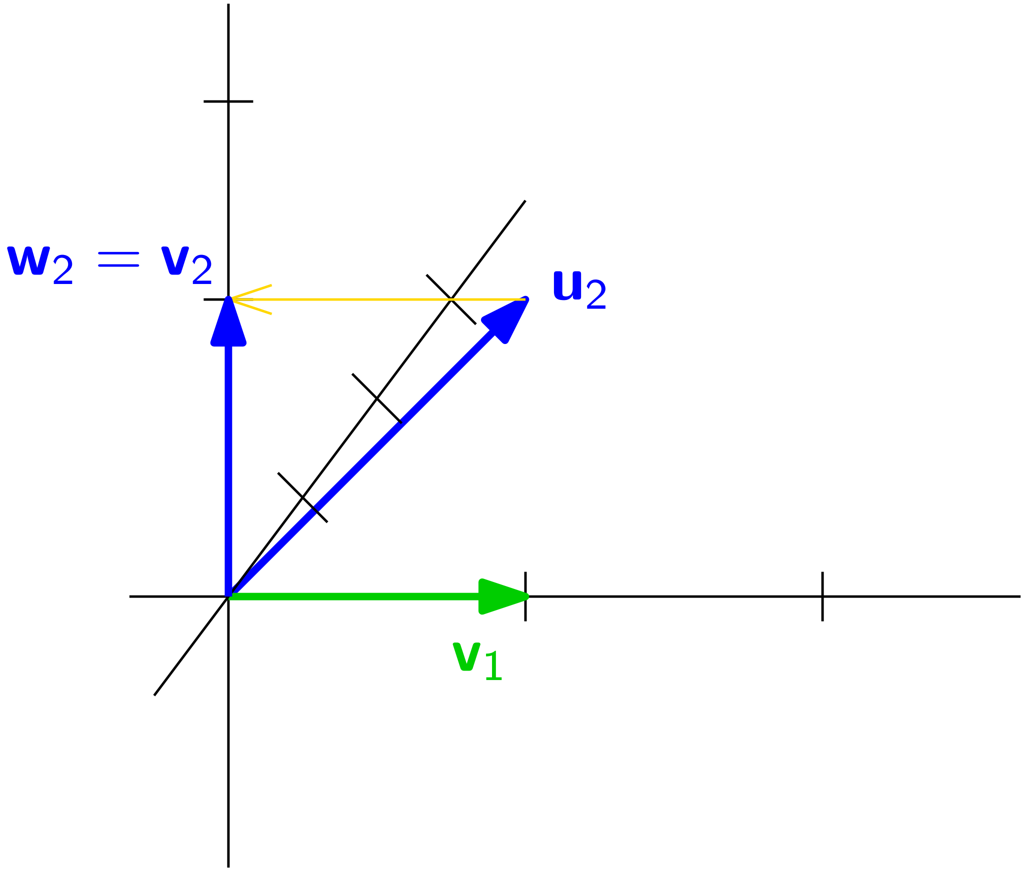
Gram-Schmidtova ortonormalizace — ukázka

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end



$i = 2:$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)^T - 1 \cdot (1,0,0)^T = (0,1,0)^T$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_2||} \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{1}(0,1,0)^T = (0,1,0)^T$$

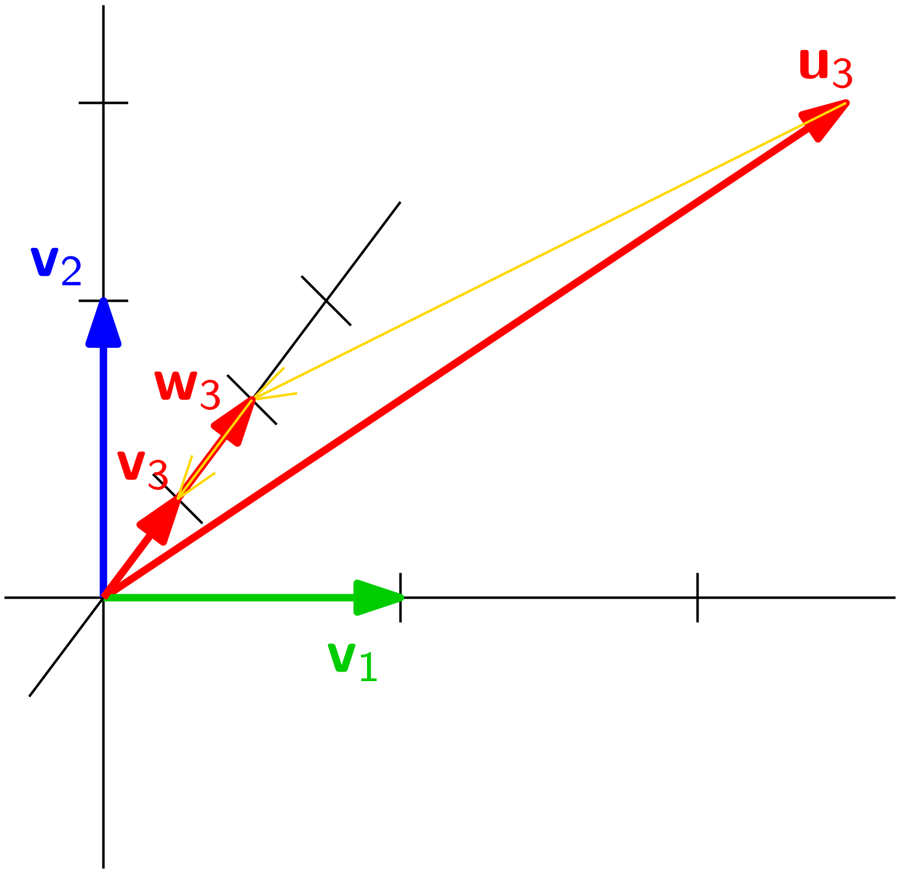
Gram-Schmidtova ortonormalizace — ukázka

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end



$i = 3:$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \langle \boldsymbol{u}_3 | \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{u}_3 | \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 =$$

$$= (2, 1, 2)^T - 2 \cdot (1, 0, 0)^T - 1 \cdot (0, 1, 0)^T = (0, 0, 2)^T$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_3||} \boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{2}(0, 0, 2)^T = (0, 0, 1)^T$$

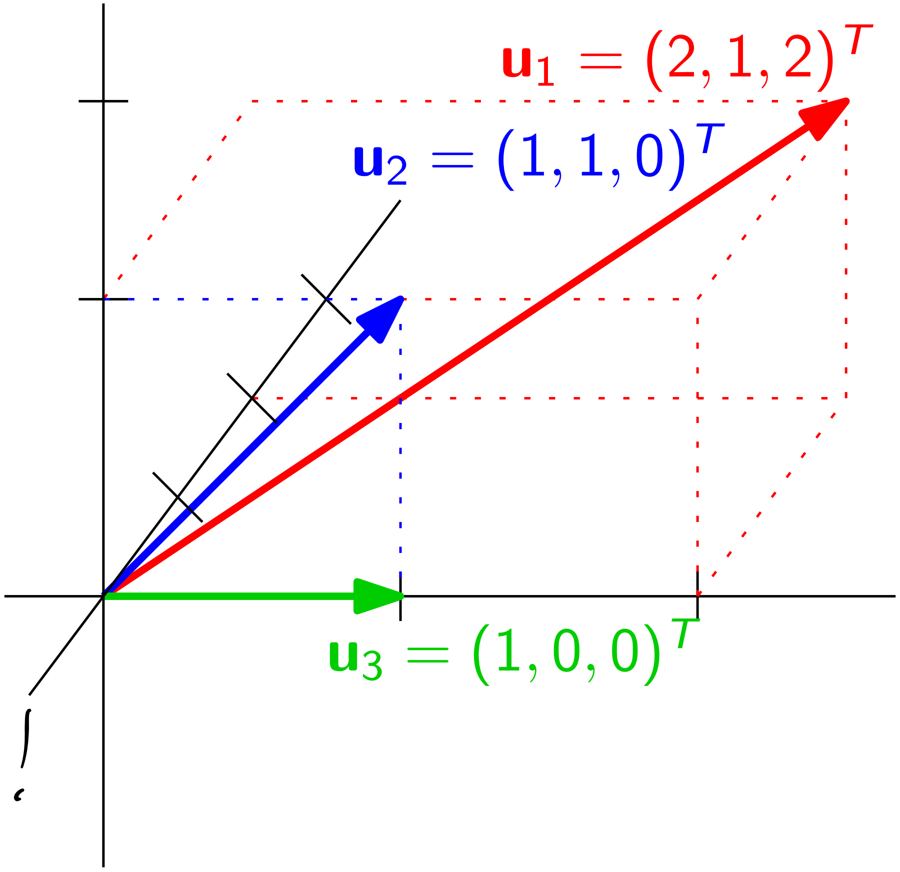
Gram-Schmidtova ortonormalizace — jiné pořadí

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end



Pro jiné pořadí se výpočty budou lišit!

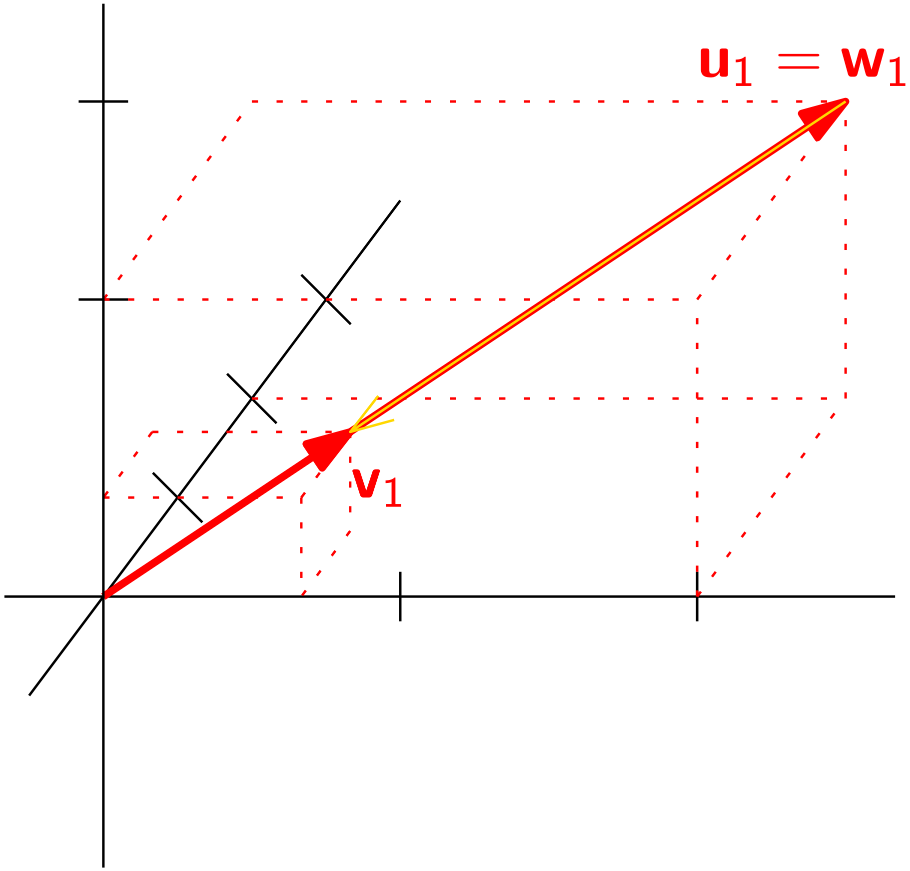
Gram-Schmidtova ortonormalizace — jiné pořadí

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end



$i = 1:$

$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (2, 1, 2)^T$

$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_1||} \boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$

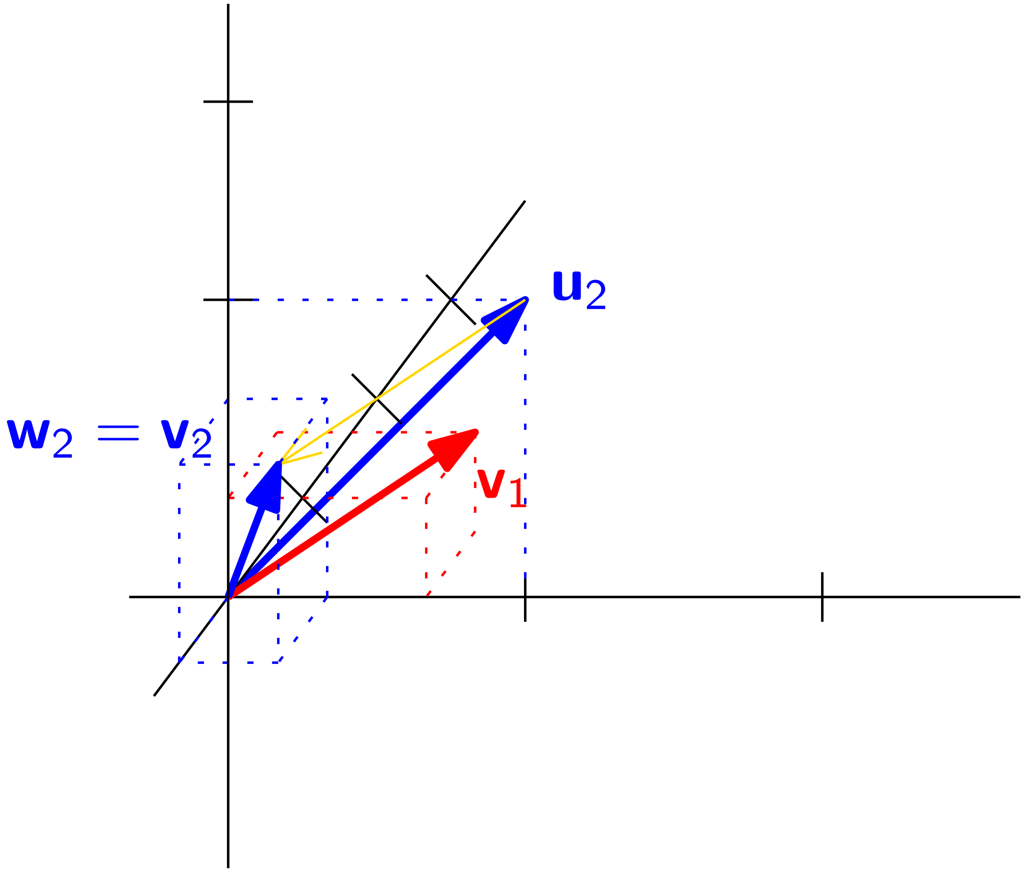
Gram-Schmidtova ortonormalizace — jiné pořadí

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end



$i = 2:$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \langle \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0)^T - 1 \cdot (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})^T = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3})^T$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_2||} \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{1} (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3})^T$$

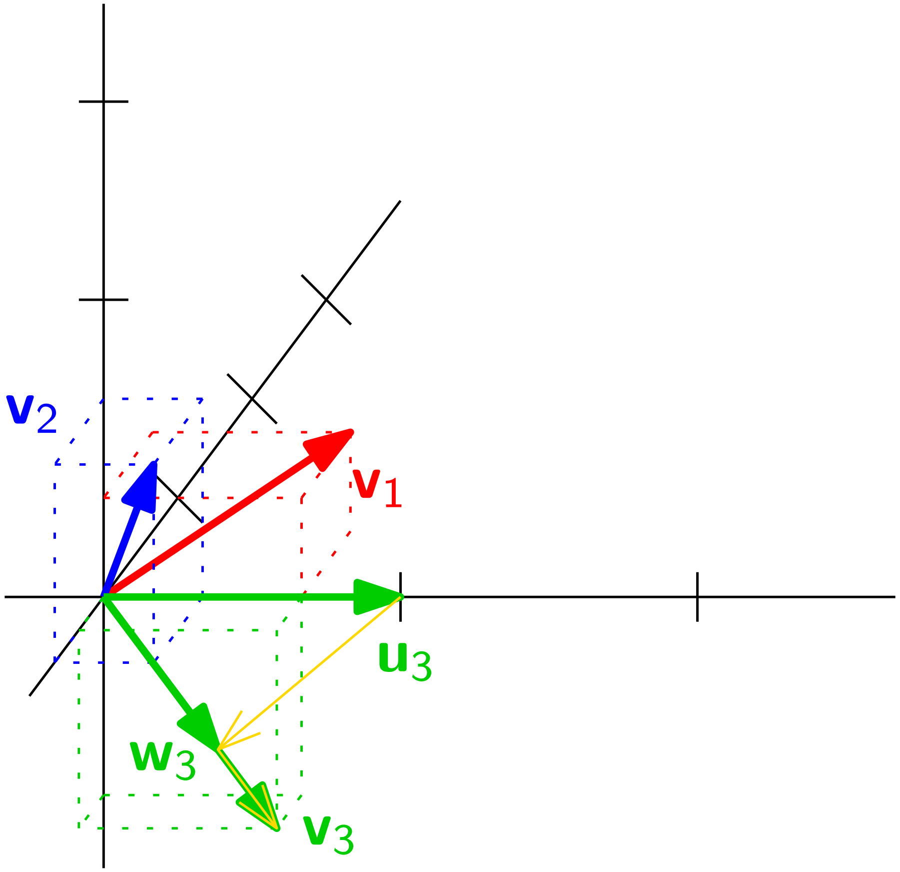
Gram-Schmidtova ortonormalizace — jiné pořadí

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$$

end



$i = 3:$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \langle \boldsymbol{u}_3 | \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{u}_3 | \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 =$$

$$= (1, 0, 0)^T - \tfrac{2}{3} \cdot (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})^T - \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3})^T = (\tfrac{4}{9}, -\tfrac{4}{9}, -\tfrac{2}{9})^T$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_3||} \boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{2/3} (\tfrac{4}{9}, -\tfrac{4}{9}, -\tfrac{2}{9})^T = (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3})^T$$

Gram-Schmidtova ortonormalizace

Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n)$:

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

1. $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$
2. $\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i$

end

Správnost:

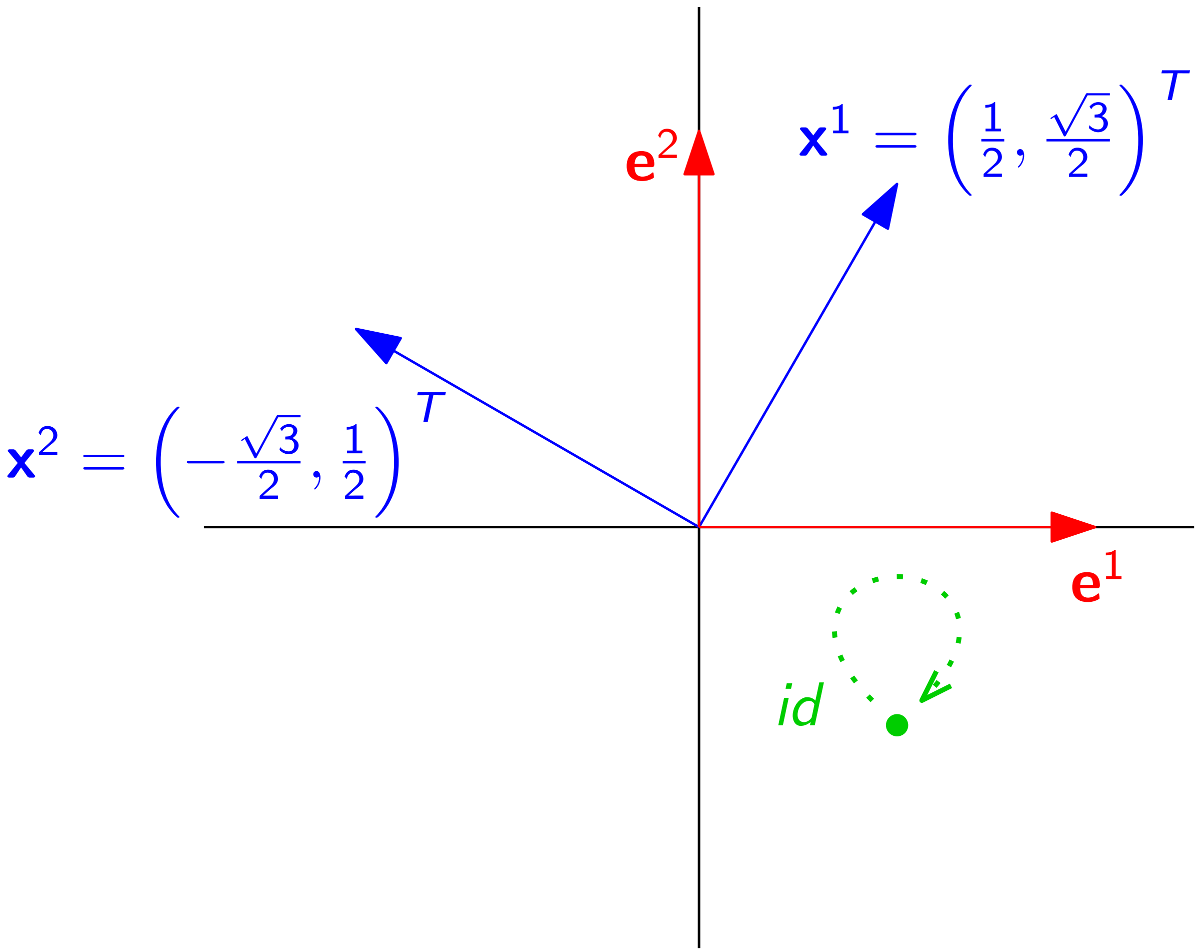
- Díky 1. a předchozímu lemmatu: $\boldsymbol{w}_i \perp \boldsymbol{v}_j$ pro každé $j < i$, odtud $\boldsymbol{v}_i \perp \boldsymbol{v}_j$ pro $j \neq i$
- Díky 2.: $||\boldsymbol{v}_i|| = \left|\left| \frac{1}{||\boldsymbol{w}_i||} \boldsymbol{w}_i \right|\right| = \frac{||\boldsymbol{w}_i||}{||\boldsymbol{w}_i||} = 1$.
- Díky lemmatu o výměně:
  $\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{u}_i) = \mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{w}_i) = \mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i)$

Důsledek: Nechť V je podprostor prostoru W se skalárním součinem. Každou ortonormální bázi podprostoru V lze rozšířit na ortonormální bázi prostoru W.

Lineární zobrazení, které zachovávají skalární součin

Definice: Lineární zobrazení f mezi prostory V a W je *isometrie*, pokud zachovává skalární součin, neboli $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{w}) \rangle$.

Příklad: Identita zachovává vektory, tedy i skalární součin.

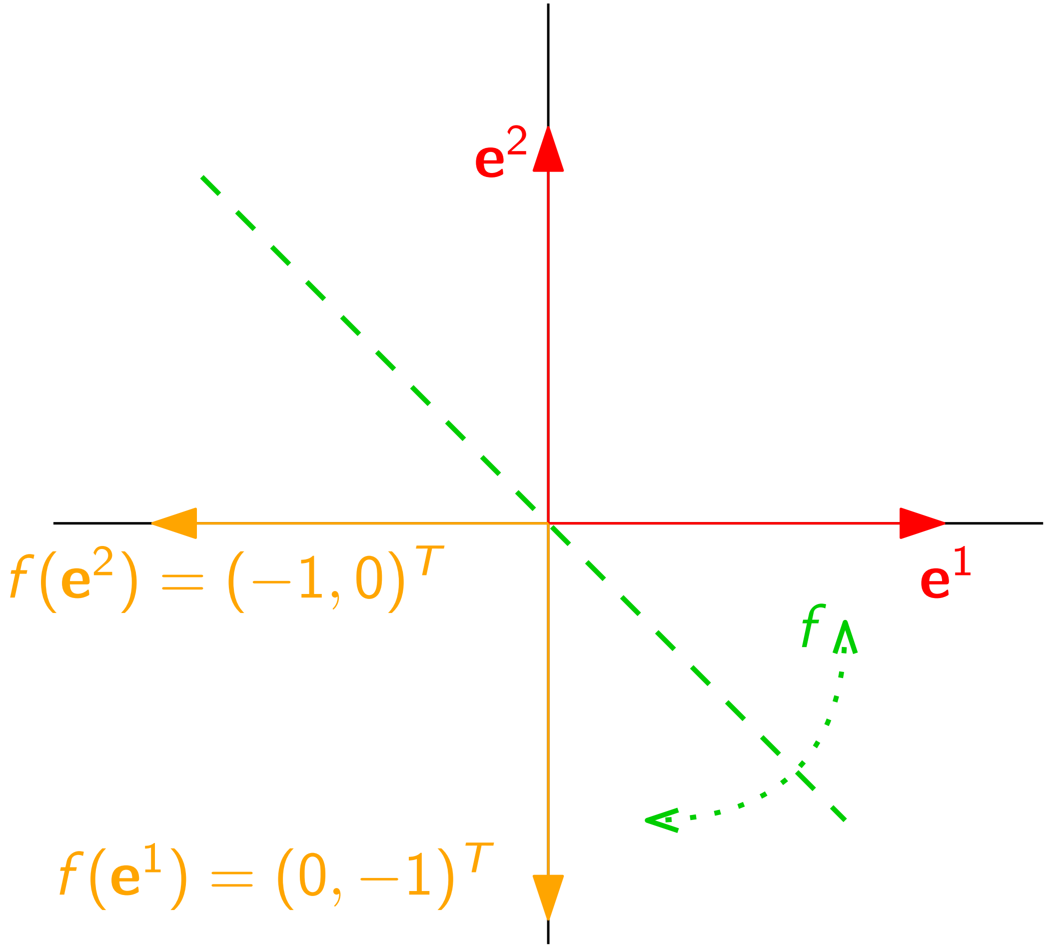


$$[id]_{X,K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení, které zachovávají skalární součin

Definice: Lineární zobrazení f mezi prostory V a W je *isometrie*, pokud zachovává skalární součin, neboli $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{w}) \rangle$.

Příklad: Osová souměrnost zachovává skalární součin.



$$[f]_{K,K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení, které zachovávají skalární součin

Definice: Lineární zobrazení f mezi prostory V a W je *isometrie*, pokud zachovává skalární součin, neboli $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{w}) \rangle$.

Věta: Lineární zobrazení mezi prostory V a W je izometrie *právě když* zachovává související normu, tj. $||\boldsymbol{u}|| = ||f(\boldsymbol{u})||$.

Důkaz: Protože norma závisí na skalárním součinu, máme $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ porovnejme:

$$\begin{array}{ccccccccc}
||\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{w}||^2 & = & ||\boldsymbol{u}||^2 & + & a\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{u} \rangle & + & \overline{a}\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle & + & a\overline{a}||\boldsymbol{w}||^2 \\
\| & & \| & & & & & & \| \\
||f(\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{w})||^2 & = & ||f(\boldsymbol{u})||^2 & + & a\langle f(\boldsymbol{w}) | f(\boldsymbol{u}) \rangle & + & \overline{a}\langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{w}) \rangle & + & a\overline{a}||f(\boldsymbol{w})||^2
\end{array}$$

pro $a = 1$ máme: $\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = \langle f(\boldsymbol{w}) | f(\boldsymbol{u}) \rangle + \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{w}) \rangle$

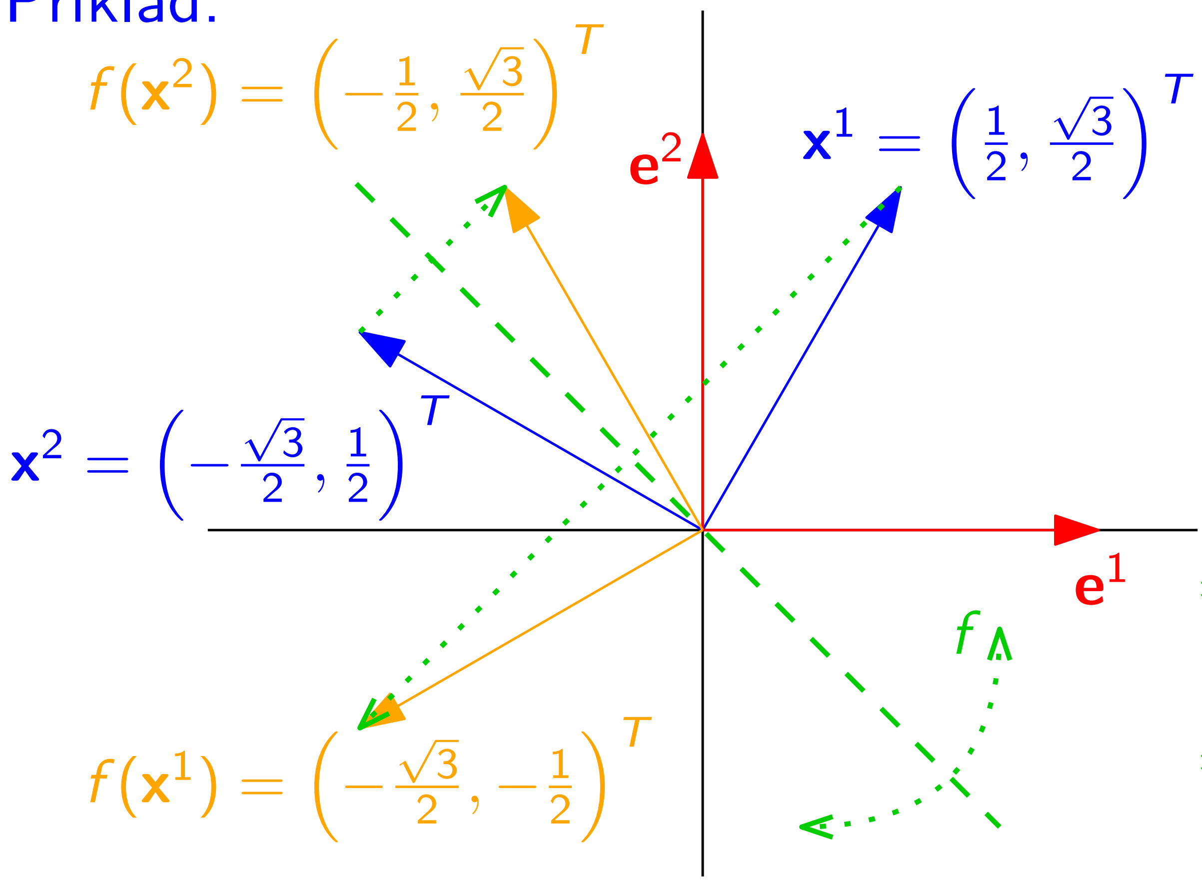
pro $a = i$ máme: $\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{u} \rangle - \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = \langle f(\boldsymbol{w}) | f(\boldsymbol{u}) \rangle - \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{w}) \rangle$

$$\Rightarrow \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{w}) \rangle$$

Maticová charakterizace bijektivních izometrií

Věta: Nechť V a W jsou prostory se skalárním součinem konečné dimenze a X, Y jsou jejich ortonormální báze. Lineární zobrazení $f : V \to W$ je bijektivní izometrie, právě když $[f]_{XY}$ je unitární.

Příklad:



$$[f]_{X,K} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= [f]_{K,K}[id]_{X,K}$$

Všimněte si, že součin unitárních matic je unitární.

Maticová charakterizace bijektivních izometrií

Věta: Nechť V a W jsou prostory se skalárním součinem konečné dimenze a X, Y jsou jejich ortonormální báze. Lineární zobrazení $f: V \to W$ je bijektivní izometrie, právě když $[f]_{XY}$ je unitární.

Důkaz: Lineární bijekce implikuje stejné dimenze a naopak.
Protože X je ortonormální: $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = [\boldsymbol{w}]_X^H [\boldsymbol{u}]_X$
Protože Y je ortonormální: $\langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{w}) \rangle = [f(\boldsymbol{w})]_Y^H [f(\boldsymbol{u})]_Y$
$$= [\boldsymbol{w}]_X^H [f]_{XY}^H [f]_{XY} [\boldsymbol{u}]_X$$

Všimněte si, že maticová rovnost $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}$ platí pro všechny vhodné vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ pouze v případě, je-li $\boldsymbol{A}$ jednotková matice.

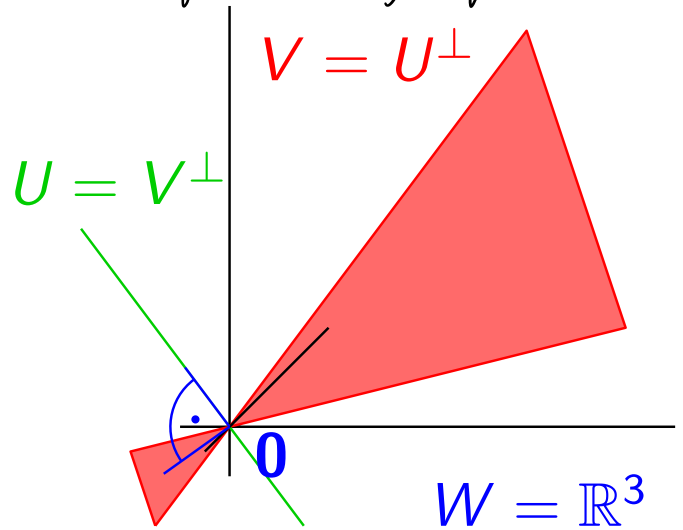
V našem případě je f izometrie pokud
$[\boldsymbol{w}]_X^H [\boldsymbol{u}]_X = [\boldsymbol{w}]_X^H [f]_{XY}^H [f]_{XY} [\boldsymbol{u}]_X$ platí pro všechna $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{w}$,
což platí právě když $[f]_{XY}^H [f]_{XY} = \boldsymbol{I}$, neboli je-li $[f]_{XY}$ unitární.

Ortogonální doplněk

Definice: *Ortogonální doplněk* podmnožiny V prostoru se skalárním součinem W je $V^\perp = \{\boldsymbol{u} \in W : \forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}\}$.

Příklad:

Ten doplněk je jen prostor všech kolmých vektorů na zadaný prostor



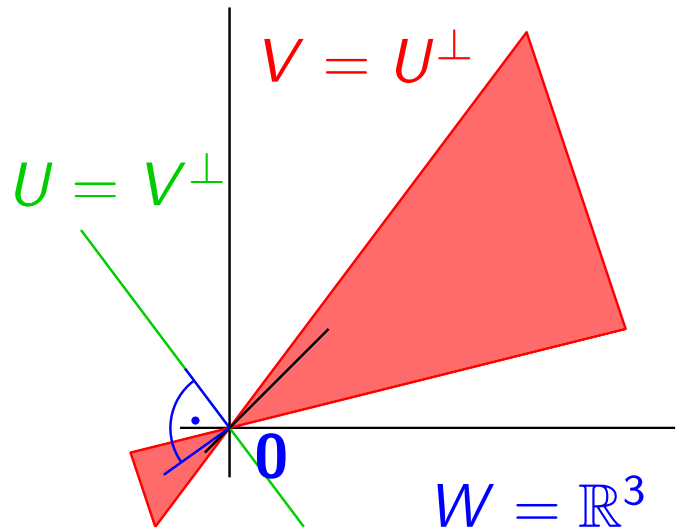
Pozorování: Pokud $U \subseteq V$, pak $U^\perp \supseteq V^\perp$.

Důkaz:
$$\begin{aligned} V^\perp &= \{\boldsymbol{u} \in W : \forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}\} \\ &\subseteq \{\boldsymbol{u} \in W : \forall \boldsymbol{v} \in U : \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}\} = U^\perp \end{aligned}$$

Ortogonální doplněk

Definice: *Ortogonální doplněk* podmnožiny V prostoru se skalárním součinem W je $V^\perp = \{\boldsymbol{u} \in W : \forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}\}$.

Příklad:



Pozorování: Pokud $U \subseteq V$, pak $U^\perp \supseteq V^\perp$.

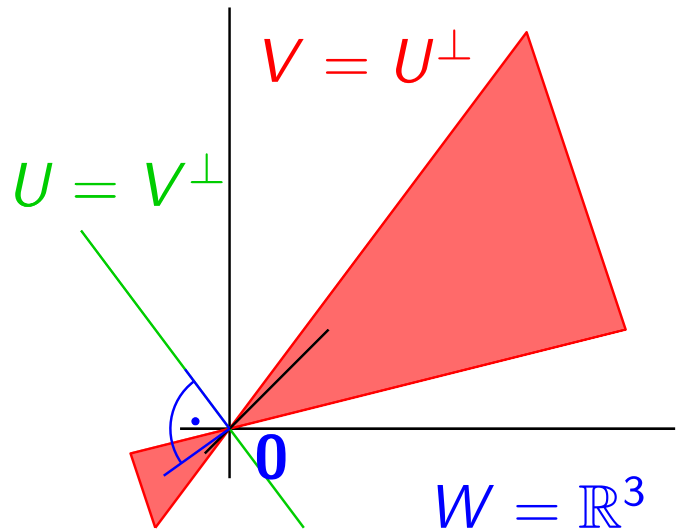
Pozorování: Každý ortogonální doplněk je podprostorem W.

Důkaz: $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Longrightarrow \langle a\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle = a\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle = 0 \Longrightarrow (a\boldsymbol{u}) \perp \boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v} \Longrightarrow \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}\rangle = 0 \Longrightarrow (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) \perp \boldsymbol{v}$

Ortogonální doplněk

Definice: *Ortogonální doplněk* podmnožiny V prostoru se skalárním součinem W je $V^\perp = \{\boldsymbol{u} \in W : \forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}\}$.

Příklad:



jenom nulový vektor dokáže být na sebe kolmý

Pozorování: Pokud $U \subseteq V$, pak $U^\perp \supseteq V^\perp$.

Pozorování: Každý ortogonální doplněk je podprostorem W.

Pozorování: Pro jakékoli $V \subseteq W : V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$

Důkaz: Jestliže $\boldsymbol{u} \in V \cap V^\perp$, pak $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle = 0$, tedy $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Pro prostory určené maticí: $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}) = (\mathcal{R}(\boldsymbol{A}))^{\perp}$

Pro reálnou matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 15 & 9 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proto $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{L}\{(1,3,4,5)^T, (0,0,1,-2)^T\} = \mathcal{L}\{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2\}$,
a také $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{L}\{(-13,0,2,1)^T, (-3,1,0,0)^T\} = \mathcal{L}\{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2\}$.

Tvrzení: Pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ libovolné $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ a $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})$ splňují $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Příklad:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}^1 - 2\boldsymbol{x}^2 = (1,3,4,5)^T - 2(0,0,1,-2)^T = (1,3,2,9)^T$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}^1 + 3\boldsymbol{y}^2 = (-13,0,2,1)^T + 3(-3,1,0,0)^T = (-22,3,2,1)^T$$

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = 1 \cdot (-22) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 0$$

Takhle to vyjde vždy!

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}^1 - 2\boldsymbol{x}^2 | \boldsymbol{y}^1 + 3\boldsymbol{y}^2 \rangle = \\ &= \langle \boldsymbol{x}^1 | \boldsymbol{y}^1 \rangle + 3\langle \boldsymbol{x}^1 | \boldsymbol{y}^2 \rangle - 2\langle \boldsymbol{x}^2 | \boldsymbol{y}^1 \rangle - 6\langle \boldsymbol{x}^2 | \boldsymbol{y}^2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Pro prostory určené maticí: $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}) = (\mathcal{R}(\boldsymbol{A}))^\perp$

Pro reálnou matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 15 & 9 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proto $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{L}\{(1,3,4,5)^T, (0,0,1,-2)^T\} = \mathcal{L}\{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2\}$,
a také $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{L}\{(-13,0,2,1)^T, (-3,1,0,0)^T\} = \mathcal{L}\{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2\}$.

Tvrzení: Pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ libovolné $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ a $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})$ splňují $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

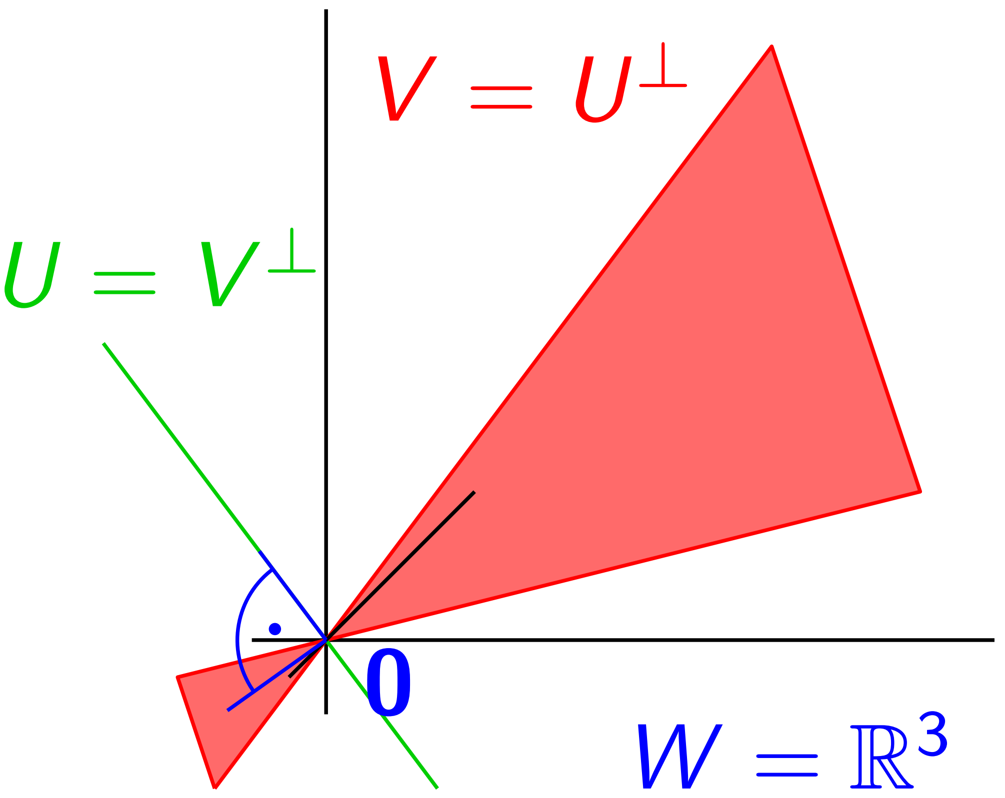
Důkaz: Označme $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^r$ bázi $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$, a podobně $\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{n-r}$ bázi $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A})$, kde $r = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$.

Potom $\boldsymbol{u} = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i \boldsymbol{x}^i$ a $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^{n-r} b_j \boldsymbol{y}^j$ splňují

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{x}_i \middle| \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{y}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \langle \boldsymbol{x}_i | \boldsymbol{y}_j \rangle = 0.$$

Vlastnosti ortogonálního doplňku

Věta: Pro konečně generovaný prostor W se skalárním součinem a podprostor V platí: $(V^\perp)^\perp = V$ a $\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(W)$.



Vlastnosti ortogonálního doplňku

Věta: Pro konečně generovaný prostor W se skalárním součinem a podprostor V platí: $(V^{\perp})^{\perp} = V$ a $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = \dim(W)$.

Důkaz: Zvolíme nějakou ortonormální bázi X prostoru V a doplníme ji na ortonormální bázi Z prostoru W.
Označme $Y = Z \setminus X$, $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$, $Y = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_l)$.

Každé $\boldsymbol{u} \in \mathcal{L}(X) = V$ je kolmé ke každému $\boldsymbol{v} \in \mathcal{L}(Y)$:

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{x}_i \middle| \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{y}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{b_j} \langle \boldsymbol{x}_i | \boldsymbol{y}_j \rangle = 0$$

protože Z je ortonormální báze. Proto $\mathcal{L}(Y) \subseteq V^{\perp}$.

Nyní vezměme $\boldsymbol{w} \in V^{\perp}$ a uvažme $[\boldsymbol{w}]_Z$. Protože Z je ortonormální, koeficienty $\boldsymbol{w}$ vzhledem k Z jsou Fourierovy koeficienty dané skalárním součinem $\boldsymbol{w}$ s prvky báze Z.
Protože $\boldsymbol{w} \in V^{\perp}$, máme $\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{x}_i \rangle = 0$ pro každé $\boldsymbol{x}_i \in X$, tedy $\boldsymbol{w} \in \mathcal{L}(Y)$, t.j. $V^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(Y)$, a tedy $V^{\perp} = \mathcal{L}(Y)$.

Nyní: $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = |X| + |Y| = |Z| = \dim(W)$
a také: $(V^{\perp})^{\perp} = \mathcal{L}(Z \setminus Y) = \mathcal{L}(X) = V$.