Skalární součin

Definice: *Skalární součin* na vektorovém prostoru V nad $\mathbb{C}$ je zobrazení, které přiřadí každé dvojici vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ skalár $\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle \in \mathbb{C}$, tak, že jsou splněny následující axiomy:

- $\forall \boldsymbol{u} \in V : \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle \in \mathbb{R}_0^+$
- $\forall \boldsymbol{u} \in V : \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle = 0 \iff \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle}$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V : \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{w}\rangle + \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}\rangle$
- $\forall \boldsymbol{u} \in V, \forall a \in \mathbb{C} : \langle a\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle = a\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle$

(Formálně je každý skalární součin zobrazení $\langle \bullet|\bullet\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$.)

Pozorování: Při vytýkání z druhé složky dostáváme komplexně sdružený skalár: $\langle \boldsymbol{u}|a\boldsymbol{v}\rangle = \overline{\langle a\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle} = \overline{a\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle} = \overline{a}\,\overline{\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle} = \overline{a}\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle$

Skalární součin na V nad $\mathbb{R}$ se omezuje na $\mathbb{R}$, t.j. obor hodnot $\langle \bullet|\bullet\rangle$ je $\mathbb{R}$, $\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle$ ve třetím axiomu a $a \in \mathbb{R}$ v posledním.

Příklady skalárních součinů

- *Standardní skalární součin* na $\mathbb{C}^n$:

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = u_1 \overline{v_1} + \cdots + u_n \overline{v_n} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} = \boldsymbol{v}^H \boldsymbol{u}$$

- *Standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{u}$$

- Skalární součin na $\mathbb{R}^n$ určený *regulární* maticí $\boldsymbol{A}$:

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{u}$$

  např. pro $V = \mathbb{R}^2$ a $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dostaneme:

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + 2 u_1 v_2 + 2 u_2 v_1 + 5 u_2 v_2$$

- Skalární součin na vektorovém prostoru reálných polynomů na intervalu $[a, b]$: $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

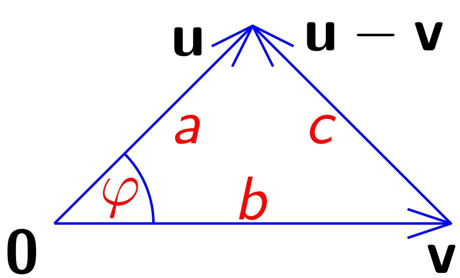
Norma

Definice: Je-li V prostor se skalárním součinem (nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$), pak *norma odvozená ze skalárního součinu* je zobrazení $|| \bullet || : V \to \mathbb{R}$ definované: $||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle}$.

Geometrická interpretace v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$:
$||\boldsymbol{u}||$ . . . délka $\boldsymbol{u}$
$||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||$ . . . vzdálenost bodů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$
$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle$ . . . souvisí s „úhlem" mezi $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a délkami $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Přesněji:

Pozorování: Standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ a související norma splňují: $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cos \varphi$, kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ (brány jako úsečky vycházející z $\mathbf{0}$).

Důkaz:



V kosinové větě: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$.
nahradíme $a = ||\boldsymbol{u}||$, $b = ||\boldsymbol{v}||$, $c = ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||$.
$\langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} | \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \rangle - 2||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cos\varphi$
$\langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} | \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} \rangle$

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Věta: Skalární součin libovolných dvou vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$ splňuje: $|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle| \leq \sqrt{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle}$.

Jinými slovy, vzhledem související normě: $|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle| \leq ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||$.

Důkaz: Pro $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ nebo $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, dostaneme $0 \leq 0$.
Pro jakékoli $a \in \mathbb{C}$ platí, že $||\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}||^2 \geq 0$, ale také:
$||\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}||^2 = \langle \boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle + a\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle + \overline{a}\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle + a\overline{a}\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle$
Pro vzájemné odečtení posledních dvou členů zvolíme $a = -\frac{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle}$.
Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle - \tfrac{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle}\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle && \ldots \cdot \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle > 0 \\
\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle &\leq \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle && \ldots \text{na } \mathbb{C} \text{ platí } a\overline{a} = |a|^2 \\
|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle|^2 &\leq ||\boldsymbol{u}||^2 \cdot ||\boldsymbol{v}||^2 && \ldots \text{odmocníme} \\
|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle| &\leq ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||
\end{aligned}
$$

Důsledky

Věta: (nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem)

Pro libovolný $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$: $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

Důkaz: Zvolíme $\boldsymbol{v} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ a použijeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost pro standardní skalární součin:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \leq |\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle| \leq ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \cdot \sqrt{n}$$

Tvrzení: Každá norma odvozená ze skalárního součinu splňuje trojúhelníkovou nerovnost: $||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|| \leq ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||$

Důkaz:

$$||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle} = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle} \leq$$
$$\sqrt{||\boldsymbol{u}||^2 + 2|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle| + ||\boldsymbol{v}||^2} \leq \sqrt{||\boldsymbol{u}||^2 + 2||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{v}||^2} = ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||$$

Kolmost

Definice: Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ z prostoru se skalárním součinem jsou *kolmé*, pokud $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = 0$. Kolmé vektory značíme $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Pozorování: Množina netriviálních vzájemně kolmých vektorů je lineárně nezávislá.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ jsou kolmé, ale $\boldsymbol{u}_0 = \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{u}_i \neq \mathbf{0}$.

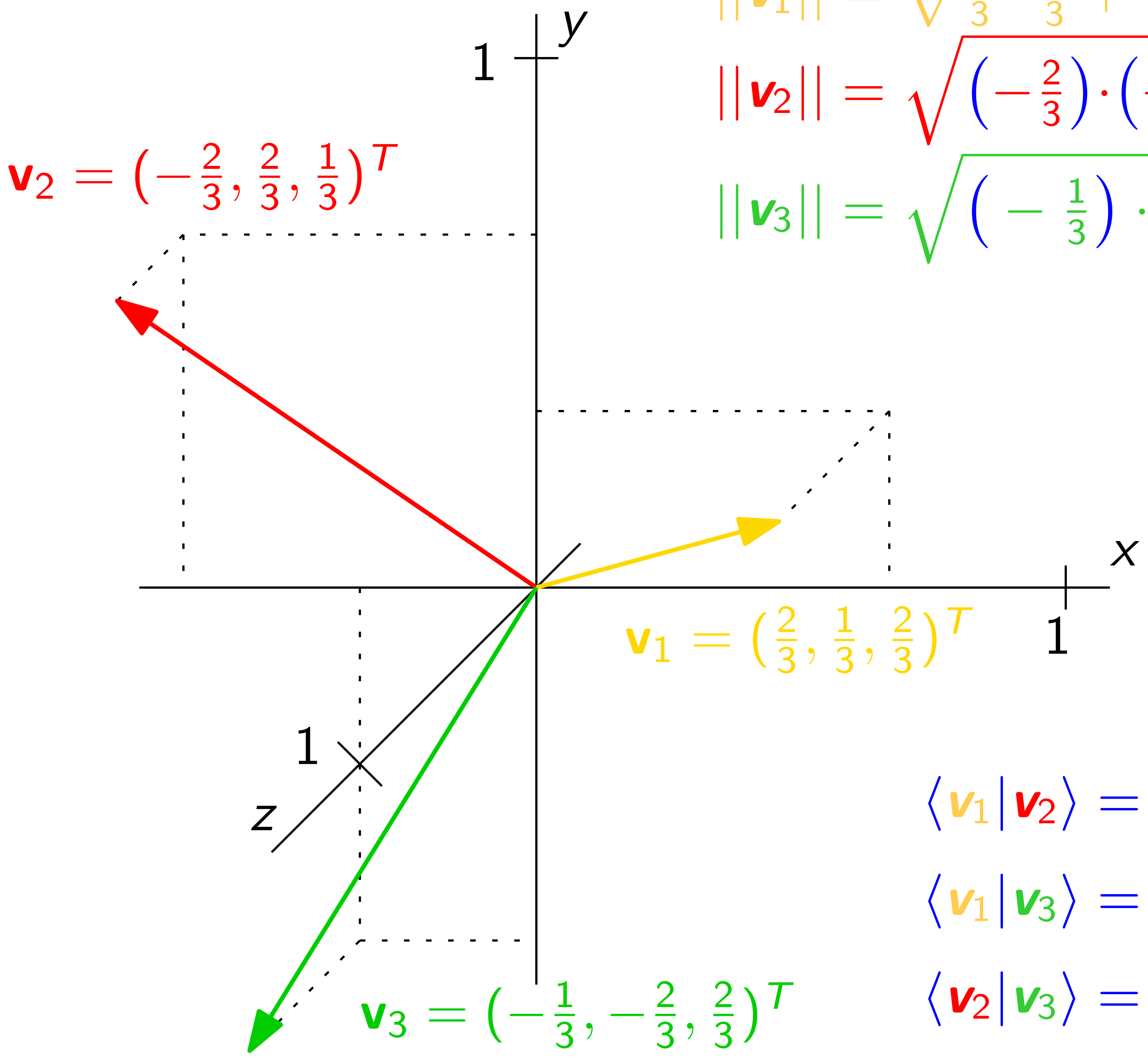
Pak:

$$0 \neq \langle \boldsymbol{u}_0 | \boldsymbol{u}_0 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{u}_i \middle| \boldsymbol{u}_0 \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle \boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{u}_0 \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot 0 = 0$$

Definice: Báze $Z = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ prostoru V se skalárním součinem je *ortonormální*, pokud $\boldsymbol{v}_i \perp \boldsymbol{v}_j$, pro každé $i \neq j$; a $||\boldsymbol{v}_i|| = 1$ pro každý $\boldsymbol{v}_i \in Z$.

Všimněte si, že matice, jejíž sloupce tvoří vektory ortonormální báze $\mathbb{C}^n$ (pro standarní skalární součin) je unitární: $\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$.

Příklad — ortonormální báze v $\mathbb{R}^3$



$$||\mathbf{v}_1|| = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}} = 1$$

$$||\mathbf{v}_2|| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

$$||\mathbf{v}_3|| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}} = 1$$

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = 0$$

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = 0$$

$$\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = 0$$

Příklady — ortonormální báze pro reálné funkce

Pro standardní skalární součin $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ obvyklá báze $(1, x, x^2)$ *není* ortonormální bazí prostoru reálných polynomů stupně nejvýše dva na intervalu $(0, 1)$:

$$||1|| = \sqrt{\int_0^1 1 \cdot 1 \, dx} = \sqrt{[x]_0^1} = 1$$

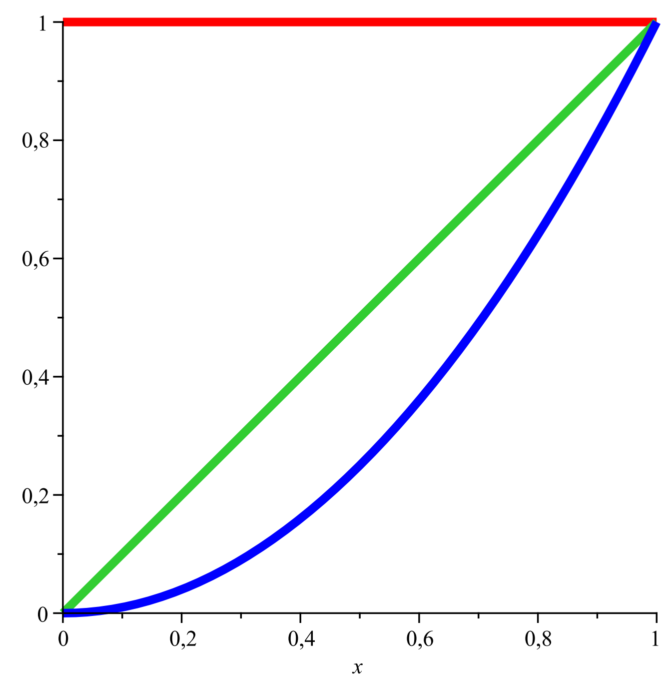
$$||x|| = \sqrt{\int_0^1 x \cdot x \, dx} = \sqrt{[\tfrac{1}{3}x^3]_0^1} = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \neq 1$$

$$||x^2|| = \sqrt{\int_0^1 x^2 \cdot x^2 \, dx} = \sqrt{[\tfrac{1}{5}x^5]_0^1} = \tfrac{\sqrt{5}}{5} \neq 1$$

$$\langle 1 | x \rangle = \int_0^1 1 \cdot x \, dx = [\tfrac{1}{2}x^2]_0^1 = \tfrac{1}{2} \neq 0$$

$$\langle 1 | x^2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot x^2 \, dx = [\tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{1}{3} \neq 0$$

$$\langle x | x^2 \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = [\tfrac{1}{4}x^4]_0^1 = \tfrac{1}{4} \neq 0$$



Je třeba vzít jinou bázi, např.
$(1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1))$:

$$||1|| = \sqrt{\int_0^1 1\cdot 1\,dx} = \sqrt{[x]_0^1} = 1$$

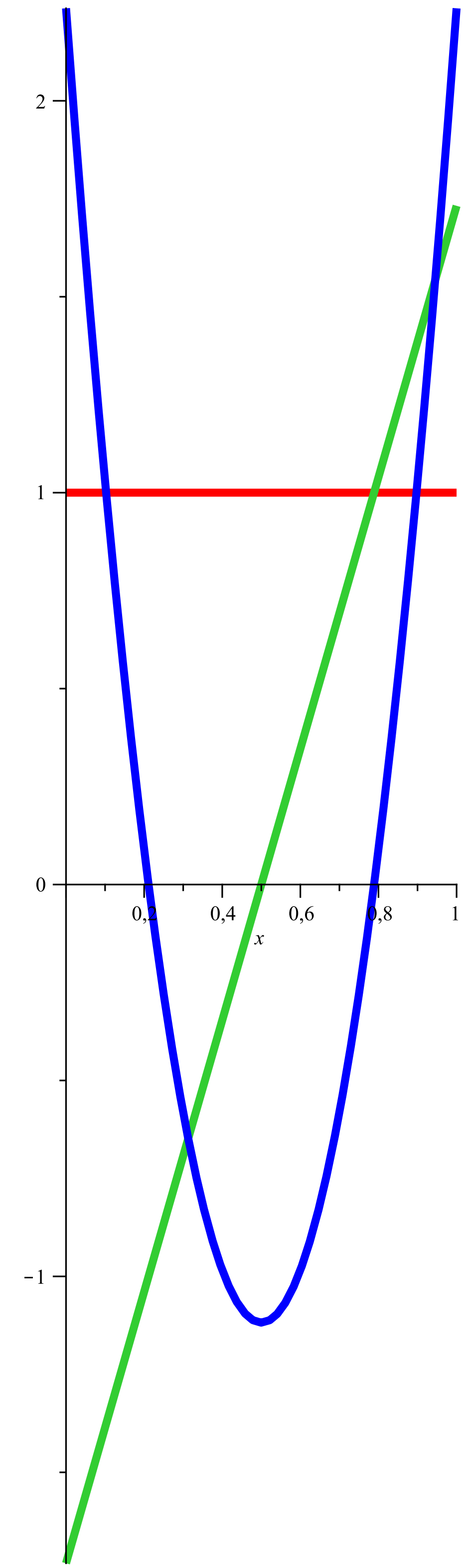
$$||\sqrt{3}(2x-1)|| = \sqrt{\int_0^1 3(4x^2-4x+1)\,dx} =$$
$$= \sqrt{3[\tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x]_0^1} = 1$$

$$||\sqrt{5}(6x^2-6x+1)|| =$$
$$= \sqrt{\int_0^1 5(36x^4-72x^3+48x^2-12x+1)\,dx} =$$
$$= \sqrt{5[\tfrac{36}{5}x^5 - 18x^4 + 16x^3 - 6x^2 + x]_0^1} = 1$$

$$\langle 1|\sqrt{3}(2x-1)\rangle = \int_0^1 \sqrt{3}(2x-1)\,dx = \sqrt{3}[x^2-x]_0^1 = 0$$

$$\langle 1|\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\rangle = \int_0^1 \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\,dx =$$
$$= \sqrt{5}[2x^3-3x^2+x]_0^1 = 0$$

$$\langle \sqrt{3}(2x-1)|\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\rangle =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{15}(12x^3-18x^2+8x-1)\,dx =$$
$$= \sqrt{15}[3x^4-6x^3+4x^2-x]_0^1 = 0$$



Ortonormální systém periodickýh funkcí

Funkce $\sin(ix)$ a $\cos(jx)$ jsou kolmé na $(-\pi, \pi)$, pro $i, j \in \mathbb{N}$.

$$\langle \sin(ix) | \sin(jx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}[\cos((i-j)x) - \cos((i+j)x)]\, dx =$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{ij} \sin((ij)x) - \tfrac{1}{i+j} \sin((i+j)x)]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \text{pro } i \neq j$$

$$\langle \cos(ix) | \cos(jx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}[\cos((i-j)x) + \cos((i+j)x)]\, dx =$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{ij} \sin((ij)x) + \tfrac{1}{i+j} \sin((i+j)x)]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \text{pro } i \neq j$$

$$\langle \sin(ix) | \cos(jx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ix) \cos(jx)\, dx = 0$$

Použijeme skutečnost, že $\sin(k\pi) = 0$ pro celé číslo k.
V posledním případě integrujeme lichou funkci na symetrickém intervalu.

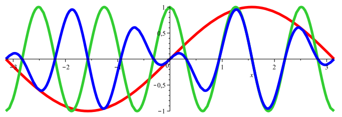
$$|| \sin(ix) ||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}[1 - \cos(2ix)]\, dx = \tfrac{1}{2}[x - \tfrac{1}{2i} \sin(2ix)]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$|| \cos(ix) ||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}[1 + \cos(2ix)]\, dx = \tfrac{1}{2}[x + \tfrac{1}{2i} \sin(2ix)]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

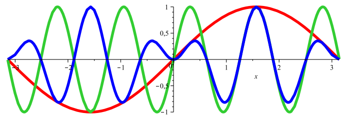
... po normalizaci pomocí $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ bychom dostali ortonormální systém.

Používáme součtové vzorce:

$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$



$\sin(x) \perp \cos(5x)$



$\sin(x) \perp \sin(5x)$

Vlastnosti ortonormální báze

Tvrzení: Nechť $Z = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ je ortonormální báze prostoru V. Pro každé $\boldsymbol{u} \in V$ platí: $\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_n \rangle \boldsymbol{v}_n$.

Koeficienty $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle$ se nazývají *Fourierovy koeficienty*.

Důkaz: $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \middle| \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle = a_j$

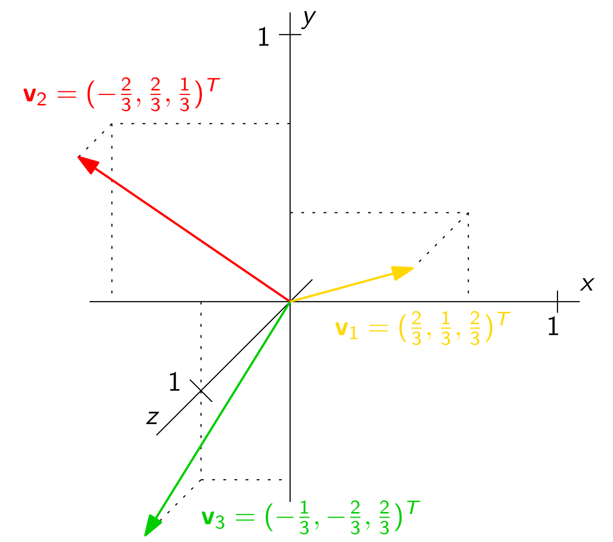
Souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} = (3, 3, 3)^T$ vzhledem k bázi $Z = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ jsou:

$$[\boldsymbol{u}]_Z = \Big(\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_3 \rangle \Big)^T = (5, 1, -1)^T$$

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_1 \rangle = 3 \cdot \tfrac{2}{3} + 3 \cdot \tfrac{1}{3} + 3 \cdot \tfrac{2}{3} = 5$$

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_2 \rangle = 3 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right) + 3 \cdot \tfrac{2}{3} + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 1$$

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_3 \rangle = 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) + 3 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right) + 3 \cdot \tfrac{2}{3} = -1$$



Zkouška: $5 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + (-1) \cdot \boldsymbol{v}_3 =$

$$= 5 \cdot \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)^T + 1 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)^T + (-1) \cdot \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right)^T = (3, 3, 3)^T = \boldsymbol{u}$$

Vlastnosti ortonormální báze

Tvrzení: Nechť $Z = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ je ortonormální báze prostoru V.
Pro každé $\boldsymbol{u} \in V$ platí: $\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_n \rangle \boldsymbol{v}_n$.

Koeficienty $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle$ se nazývají *Fourierovy koeficienty*.

tj. jsou na sebe kolmé až na $\langle v_j | v_j \rangle = 1$

Důkaz: $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \middle| \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle = a_j$

z def. ortonormální báze

Věta: Nechť Z je ortonormální báze prostoru V se skalárním součinem. Pro každé $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$ platí: $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = [\boldsymbol{w}]_Z^H [\boldsymbol{u}]_Z$.

Důkaz: Víme, že: $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$.

Pak $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_j \right\rangle =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle \overline{\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{v}_j \rangle} \langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v}_i \rangle \overline{\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{v}_i \rangle} = [\boldsymbol{w}]_Z^H [\boldsymbol{u}]_Z$$