$$[f]_{XX} = [id]_{YX} [f]_{YY} [id]_{XY}$$

$$[f(u)]_X = [f]_{XX} [u]_X$$

$$[id]_{XY} = [id]_{YX}^{-1}$$

Matice $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ jsou si podobné, pokud existuje reg. mat. R:

$$A = R^{-1} B R$$

Pokud A podobná B, : $B = RAR^{-1}$, vlastní číslo λ náleží vlastnímu vektoru x v A, pak λ je vlastní číslo B příslušné vektoru Rx.

$$y = Rx \; : \; By = RAR^{-1}Rx = RAx = \lambda Rx = \lambda y$$

Jsou-li podobné $\Rightarrow$ $p_B(t) = p_A(t)$

Důkaz: $p_{\boldsymbol{B}}(t) = \det(\boldsymbol{B} - t\boldsymbol{I}) = \det(\boldsymbol{RAR}^{-1} - \boldsymbol{R}(t\boldsymbol{I})\boldsymbol{R}^{-1}) = \det(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{I})\boldsymbol{R}^{-1}) = \det(\boldsymbol{R})\det(\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{I})\det(\boldsymbol{R}^{-1}) = p_{\boldsymbol{A}}(t)$

Geometrická násobnost vlastního čísla λ matice A je menší nebo rovna její algebraické násobnosti.

Důkaz: Vezměme $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ jako matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ vzhledem ke kanonické bázi K, tzn. $\boldsymbol{A} = [f]_{K,K}$.
Nechť $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ je bází prostoru vlastních vektorů příslušných λ, čili k je geometrická násobnost vlastního čísla λ.

Doplníme $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ na bázi X prostoru $\mathbb{K}^n$.
Potom $[f]_{X,X} = [id]_{X,K}^{-1} \boldsymbol{A} [id]_{X,K}$ je podobná $\boldsymbol{A}$ a přitom $[f]_{X,X}$ má v prvních k sloupcích na diagonále λ a jinak nuly.

Odtud $(\lambda - t)^k$ dělí $p_{[f]_{X,X}}(t)$. Protože $\boldsymbol{A}$ a $[f]_{X,X}$ mají stejné charakteristické polynomy, má λ algebraickou násobnost alespoň k.

Matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ je podobná diagonální matici $\iff$ $\mathbb{K}^n$ má bázi sestávající se z vlastních vektorů A.

$AR = RD$ s diag. mat. D, pokud $\forall i$: $\exists$ vektor x (i-tý sloupec R) t.ž. $Ax = d_{ii}x$

$\hookrightarrow$ Taková matice je diagonizovatelná.

$\hookrightarrow$ Má-li čtvercová matice řádu n n různých vlastních čísel, je diagonizovatelná.

$\hookrightarrow$ stejné tak ale stačí mít algebraicky vícenásobná vlastní čísla

$\hookrightarrow$ **Důsledek:**

Když $p_A(t) = \prod (t - \lambda_i)^{r_i}$, pak A je diagon. $\iff \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)) = r_i$

$\hookrightarrow$ **Další důsledek: mocnění matic:**

Je-li $A = R^{-1} D R$, pak $\forall k$: $A^k = (R^{-1} D R)^k = \dots = R^{-1} D^k R$

$$A^3 = R^{-1} D \cancel{R R^{-1}} D \cancel{R R^{-1}} D R = R^{-1} D^3 R$$

Jordanova normální forma:

Jordanův blok je čtvercová matice ve tvaru: $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

– tedy že nad diagonálou má samé „1".

Každá čtvercová komplexní matice A je podobná matici J v takzvané Jordanově normální formě.

– Každý Jordanův blok J_{λ_i} odpovídá vlastnímu číslu λ_i matice A.

Více jich může odpovídat λ_i.

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Pro každé λ je počet bloků a jejich velikosti jednoznačně určeny A.

Pozorování: Diagonalizovatelná A má Jordanovy bloky 1×1

Nechť $AR = RJ_\lambda$

Označíme-li i-tý sloupec R jako x_i, pak splňuje $(A-\lambda I)^i x_i = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} RJ_\lambda & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \dots & 1 \\ & & & & \lambda \\ \hline x_1 \; x_2 \dots x_n & \lambda x_1 & x_1 + \lambda x_2 & \dots & x_{n-1} + \lambda x_n \end{array}$$

$$(A-\lambda I)^2 x_2 = (A-\lambda I) x_1 = 0$$

$$Ax_1 = \lambda x_1 \implies (A-\lambda I)x_1 = 0$$

$$Ax_2 = x_1 + \lambda x_2 \implies (A-\lambda I)x_2 = x_1 \implies (A-\lambda I)^2 x_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$Ax_n = x_{n-1} + \lambda x_n \implies (A-\lambda I)x_n = x_{n-1} \implies (A-\lambda I)^n x_n = 0$$

Ukázka

Matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ je podobná matici v Jordanově normálním tvaru se dvěma bloky $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, protože

$$\boldsymbol{AR} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{RJ}$$

$(3,2,1)^T$ je vlastní vektor pro 2, čili $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_3)(3,2,1)^T = \mathbf{0}$ a
$(1,1,1)^T$ je vlastní vektor pro 1, čili $(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{I}_3)(1,1,1)^T = \mathbf{0}$.

Prostřední sloupec matice $\boldsymbol{R}$ ovšem splňuje
$\boldsymbol{A} \cdot (2,2,1)^T = (3,2,1)^T + 2 \cdot (2,2,1)^T \implies$
$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_3)\ (2,2,1)^T = (3,2,1)^T \implies$
$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_3)^2 (2,2,1)^T = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_3)(3,2,1)^T = \mathbf{0}$.

Speciální komplexní matice

Definice: *Hermitovská transpozice* komplexní matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je matice $\boldsymbol{A}^H \in \mathbb{C}^{n\times m}$ kde $(\boldsymbol{A}^H)_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$.

Definice: Matice $\boldsymbol{A}$ je *hermitovská*, pokud $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$.

Definice: Matice $\boldsymbol{A}$ je *unitární*, pokud $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^H$.

reálná	komplexní
transpozice $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^T$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	Hermitovská transpozice $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^H$ $\begin{pmatrix} 1+i & -2i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \end{pmatrix}$
symetrická $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	hermitovská $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$ $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$
ortogonální $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	unitární $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^H$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Vlastnosti

Pozorování: Hermitovské matice mají reálnou úhlopříčku:
Pokud $a_{i,i} = \overline{a_{i,i}}$, pak $a_{i,i} \in \mathbb{R}$.

Pozorování: $(\boldsymbol{A}^H)^H = \boldsymbol{A}, \quad (\boldsymbol{AB})^H = \boldsymbol{B}^H\boldsymbol{A}^H$

Pozorování: Jestliže je $\boldsymbol{A}$ unitární, pak $\boldsymbol{A}^H$ je také unitární.
$(\boldsymbol{A}^H)^H = \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = (\boldsymbol{A}^H)^{-1}$

Pozorování: Součin unitárních matic je unitární:
Pokud $\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}^{-1}$ a $\boldsymbol{B}^H = \boldsymbol{B}^{-1}$, pak
$(\boldsymbol{AB})^H = \boldsymbol{B}^H\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{AB})^{-1}$.

Pozorování: Unitární $\boldsymbol{A}$ splňuje: $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.
T.j. pokud $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ jsou sloupce $\boldsymbol{A}$,
pak $(\boldsymbol{x}^i)^H\boldsymbol{x}^j = 0$ pro $i \neq j$ a $(\boldsymbol{x}^i)^H\boldsymbol{x}^i = 1$.

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} | & & | \\ \boldsymbol{x}^1 & \ldots & \boldsymbol{x}^n \\ | & & | \end{array}\right]$$

Fakt: Každý $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x} = 1$
lze doplnit na unitární matici.

$$\left[\begin{array}{c|c} | & \\ \boldsymbol{x} & \quad\quad \\ | & \end{array}\right]$$

Diagonalizace hermitovských matic

Věta: Každá hermitovská matice $\boldsymbol{A}$ má všechna vlastní čísla reálná. Navíc existuje unitární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Příklad: Diagonalizujte hermitovskou matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$.

$$p_{\boldsymbol{A}}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1+i \\ 1-i & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t) - (1-i)(1+i) = t^2 - 3t$$

Vlastní čísla $\boldsymbol{A}$ jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 0$.

Odpovídající unitární matice složená z vlastních vektorů je: $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{R}$ je dokonce inverzní sama k sobě: $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}$.)

Diagonalizace probíhá podle součinu: $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pokud obrátíme pořadí vlastních čísel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, dostaneme:

$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^H = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Důkaz

Indukcí podle n. Věta platí pro $n = 1$. Označme $\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}$.

V tělese $\mathbb{C}$ má matice $\boldsymbol{A}_n$ vlastní číslo λ s vlastním vektorem $\boldsymbol{x}$.

Zvětšíme $\boldsymbol{x}$ faktorem $\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x}}}$, abychom dostali $\boldsymbol{x}$ splňující $\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x} = 1$.

Doplníme (vizte fakt dříve) $\boldsymbol{x}$ na unitární matici $\boldsymbol{P}_n$.

$\boldsymbol{P}_n^H \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{P}_n$ je hermitovská $(\boldsymbol{P}_n^H \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{P}_n)^H = \boldsymbol{P}_n^H \boldsymbol{A}_n^H (\boldsymbol{P}_n^H)^H = \boldsymbol{P}_n^H \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{P}_n$.

Protože $\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, matice $\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{P}_n$ má $\lambda \boldsymbol{x}$ jako první sloupec.

Protože $\boldsymbol{P}_n$ je unitární, první sloupec $\boldsymbol{P}_n^H \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{P}_n$ je $\boldsymbol{P}_n^H \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{x} =$
$\boldsymbol{P}_n^H (\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}_n^H (\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{P}_n^H \boldsymbol{x} = \lambda (1, 0, \ldots, 0)^T = (\lambda, 0, \ldots, 0)^T$.
$\boldsymbol{P}_n^H \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{P}_n$ je hermitovská $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ a zbytek prvního řádku je $\mathbf{0}^T$.

Proto $\boldsymbol{P}_n^H \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{P}_n = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{array}\right)$, kde $\boldsymbol{A}_{n-1}$ je hermitovská.

Podle indukčního předpokladu $\boldsymbol{R}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{A}_{n-1} \boldsymbol{R}_{n-1} = \boldsymbol{D}_{n-1}$
pro nějakou unitární matici $\boldsymbol{R}_{n-1}$ a diagonální matici $\boldsymbol{D}_{n-1}$.

Položíme $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{P}_n \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \\ \hline\end{array}$, součiny unitárních matic jsou unitární. Nyní:

$$\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{R}_n^H\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1}^H \\ \hline\end{array} \cdot \boldsymbol{P}_n^H\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \\ \hline\end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1}^H \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_{n-1} \\ \hline\end{array} = \boldsymbol{D}_n$$

Věta: Každá *reálná symetrická* matice $\boldsymbol{A}$ má všechna vlastní čísla reálná a existuje *ortogonální* $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Podle stejného důkazu, jen je třeba najít reálný vlastní vektor $\boldsymbol{x}$. Takový $\boldsymbol{x}$ existuje, protože soustava $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ má všechny koeficienty reálné.

Ukázka

Dána $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_3 = $

$$= \begin{pmatrix} 2 & \frac{2(1+i)}{3} & \frac{-1-i}{3} \\ \frac{2(1-i)}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2i}{3} \\ \frac{-1+i}{3} & -\frac{2i}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$p_{\boldsymbol{A}_3}(t) = t^3 - 5t^2 + 6t$,

vl. číslu $\lambda = 2$ odpovídá $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)^T$,

jenž znormalizujeme na $\boldsymbol{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$

Doplníme jej na unitární $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ a získáme hermitovskou

$$\boldsymbol{P}_3^H \boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{P}_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 2 \end{array}\right)$$

Podle indukčního předpokladu diagonalizujeme $\boldsymbol{R}_2^{-1} \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{D}_2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro

$$\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{P}_3 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_2 \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-3+i}{3\sqrt{3}} & \frac{-1-2i}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2i}{3\sqrt{3}} & \frac{4+2i}{3\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} & \frac{3-2i}{3\sqrt{3}} & \frac{-1+i}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

pak platí: $\boldsymbol{R}_3^{-1} \boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{R}_3 =$

$$= \boldsymbol{D}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$