## Vlastní číslo:

Pro vektorový prostor $V$ nad tělesem $\mathbb{K}$ a lin. zobr. $f: V \to V$, vlastní číslo zobrazení $f$ je jakékoli $\lambda \in \mathbb{K}$, pro které existuje vektor $u \in V \setminus o$ takový, že $f(u) = \lambda u$

## Vlastní vektor:

Odpovídající vlastnímu číslu $\lambda$ je libovolný vektor $u \in V$ takový, že $f(u) = \lambda u$

Jestliže má $V$ konečnou dimenzi $n$, pak $f$ můžeme reprezentovat maticí $A = [f]_{XX} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, vzhledem k bázi $X$ prostoru $V$.

Můžeme tak definovat vlastní čísla $\lambda \in \mathbb{K}$ a vlastní vektory $x \in \mathbb{K}^n$ matic

$\Rightarrow$ ty musejí splňovat $Ax = \lambda x$

**Spektrum** = počet vlastních čísel

Aby existovalo vlastní číslo, musí vektor zachovat směr.

$\Rightarrow$ tudíž například otočení o $90°$ nezachová žádný směr $\Rightarrow$ nemá vlastní čísla/vekt

$[f]_{XX} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – zvětšení faktorem 2. Každý vektor je zde vlastní.

### Vlastní vektory a vlastní čísla diagonální matice $\boldsymbol{D}$

Rovnice

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1}x_1 \\ d_{2,2}x_2 \\ \vdots \\ d_{n,n}x_n \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{x}$$

splňují následující vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda = d_{1,1} \text{ a } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T,$$
$$\lambda = d_{2,2} \text{ a } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T,$$
$$\vdots$$
$$\lambda = d_{n,n} \text{ a } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^n = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T.$$

Vlastní čísla $\boldsymbol{D}$ jsou tedy prvky na diagonále, a vlastní vektory tvoří kanonickou bázi prostoru $\mathbb{K}^n$.

Vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu číslu tvoří podprostor.

Mějme vlastní číslo $\lambda$ lineárního zobrazení $f: V \to V$

a množinu $U = \{u \in V : f(u) = \lambda u\}$

Pro jakékoliv $u, v \in U$ and $a \in \mathbb{K}$ dostaneme:

- $f(au) = af(u) = a\lambda u = \lambda(au)$
- $f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$

$\hookrightarrow$ proto je $U$ uzavřen na sčítání a skalární násobky,

t.j. <u>$U$ je podprostorem</u> $V$.

Geometrická násobnost vlastního čísla je dimenze (pod)prostoru jeho vlastních vektorů.

Nechť $f: V \to V$ je lin. zobr. a $\lambda_1 \dots \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla $f$

a $u_1 \dots u_k$ odpovídající netriviální vlastní vektory. Potom $u_1 - u_k$ jsou

lineárně nezávislé.

Sporem: Nechť $k$ je nejmenší číslo, pro které existují $\lambda_1 \dots \lambda_k$ a $u_1 \dots u_k$

odpovídající výše, t.j. existují $a_1 \dots a_k \in \mathbb{K} \setminus 0$ takové, že $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0$

$\hookrightarrow$ tedy že některé jsou LZ.

$$0 = \begin{cases} \lambda_k 0 = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i u_i \\ f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i u_i \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ tedy $0 = 0 - 0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i u_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i u_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) a_i u_i$

Protože $\lambda_i \neq \lambda_k$, dostaneme $(\lambda_i - \lambda_k) a_i \neq 0$, takže jenom vektory

$u_1 - u_{k-1}$ jsou lineárně závislé, což je spor s minimalitou $k$.

Nechť $f: V \to V$ je lin. zobr. a $\lambda_1 \dots \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla $f$ a $u_1 \dots u_k$ odpovídající netriviální vlastní vektory. Potom $u_1 \dots u_k$ jsou LNZ.

Matice řádu $n$ může mít nejvýše $n$ různých vlastních čísel!

## Charakteristický polynom:

Matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ je $p_A(t) = \det(A - tI_n)$

Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, právě když je $\lambda$ kořenem jeho charakteristického polynomu $p_A(t)$.

$\lambda$ je vlastní číslo $A \iff$

$\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : Ax = \lambda x$

$\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : 0 = Ax - \lambda x = Ax - \lambda I_n x = (A - \lambda I_n) x$

$\iff$ matice $A - \lambda I_n$ je singulární

$\iff 0 = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)$

## Algebraická násobnost:

Počet, kolikrát můžeme char. polynom vydělit dvojčlenem $\lambda - t$.

## Výpočet:

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad p_A(t) = \begin{vmatrix} \cdot - t & \vdots & \vdots \\ \vdots & -t & \vdots \\ \cdot & \vdots & -t \end{vmatrix}$$

na diagonále odečtu $-t$. Pak vypočtu determinant.

Vlastní čísla jsou kořeny determinantu.

Pak jednotlivá vlastní čísla dosazuji do matice a hledám množinu všech řešení.

## Koeficienty char. polynomu:

Pro $p_A(t) = \det(A - tI_n) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i$ platí:

- $b_n = (-1)^n$ → pouze součin podél diagonály dá $t^n$, jelikož každá jiná permutace se alespoň jednou vyhne „$t$"
  - každý takový faktor má koeficient „$-1$".
- $b_0 = \det(A)$ → dosadíme $t=0$ do $p_A(t)$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ → součet prvků na diagonále matice $A$.
  - člen $t^{n-1}$ lze získat pouze ze součinu $n$ lineárních členů $(a_{1,1}-t)(a_{2,2}-t)\dots(a_{n,n}-t)$ na diagonále $A - tI_n$ tak, že vybereme $n-1$ krát výraz „$-t$" a jedenkrát „$a_{i,i}$". Takový výběr lze provést $n$ způsoby, kdy sčítance koeficientu $a_{i,i}$ odpovídají různým výběrům $(-t)^{n-1}$

## Díky algebraické uzavřenosti platí:

$$p_A(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}(\lambda_2 - t)^{r_2}\dots(\lambda_k - t)^{r_k}, \text{ kde } r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$$

Exponent $r_i$ je algebraická násobnost čísla $\lambda_i$.

↳ Pak ale i platí: $b_0 = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{r_i}$

↳ $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\lambda_i + \dots + \lambda_i}_{r_i}$ → přičítám do součtu tolikrát, kolikrát má algebraickou násobnost.