Polynom stupně n v proměnné x nad těl. $\mathbb{K}$ je výraz:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

kde $a_n \neq 0$ a $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{K}$.

Píšeme $p \in \mathbb{K}(x)$

Platí:

sčítání, násobení skalárem, součin

$(q+p)(x)$, $(\alpha \cdot p)(x)$, $(q \cdot p)(x)$

Kořen polynomu $p \in \mathbb{K}(x)$ je $r \in \mathbb{K}$ takový, že $p(r) = 0$

r je kořenem pol. $p \iff x - r \mid p$ beze zbytku.

Násobnost kořene r from $p \in \mathbb{K}(x)$ je největší kladné celé číslo k takové, že $(x-r)^k \mid p$.

Každý polynom $p \in \mathbb{C}(x)$ má alespoň jeden kořen.

- Každý polynom $p \in \mathbb{C}(x)$ lze rozložit na součin lin. faktorů, t.j. na polynomy prvního stupně.

Algebraicky uzavřené těleso je tehdy, pokud všechny $p \in \mathbb{K}(x)$ mají kořen.

Vandermondova matice

Pozorování: Koeficienty $a_0, \dots, a_n$ z p jsou řešením soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Definice: Matice této soustavy je *Vandermondova matice* $\boldsymbol{V}_{n+1}(x_0, \dots, x_n)$

Věta: Vandermondova matice $\boldsymbol{V}_{n+1}(x_0, \dots, x_n)$ je regulární, právě když $x_0, \dots, x_n$ jsou různá.

Používá se pro výpočet koeficientů polynomu zadaných několika body $(x_i; y_i)$

Věta: Vandermondova matice $\boldsymbol{V}_{n+1}(x_0, \dots, x_n)$ je regulární, právě když $x_0, \dots, x_n$ jsou různá.

ůkaz regularity Vandermondovy matice

$$\boldsymbol{V}_{n+1}(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Odečteme první řádek od jiných. Poté vytkneme $x_i - x_0$ z i-tého řádku pro každé $i = 1, \dots, n$. V prvním sloupci je n nul, takže můžeme rozvést: $\det(\boldsymbol{V}_{n+1}) =$

$$= \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 & \dots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2 & \dots & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & x_n^2 + x_n x_0 + x_0^2 & \dots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1} \end{vmatrix}$$

Nyní *odzadu* odečteme od každého sloupce x_0-násobek předchozího. Tak eliminujeme všechny sčítance obsahující x_0.

Získáme následující rekurenci, jíž už lze snadno rozvést:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{V}_{n+1}(x_0, \dots, x_n)) &= \left(\prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \right) \det(\boldsymbol{V}_n(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \prod_{i<j} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

Lagrangeova interpolace:

- interpretace polynomu $p \in K(x)$ stupně n pomocí $n+1$ dvojic (x_i, y_i) pro $i = 1, \dots, n+1$

1) Mějme $n+1$ pomocných polynomů stupně n.

$$p_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n+1})}$$

normalizační by bylo stejné

Všimneme si, že $p_i(x_i) = 1$, $p_i(x_j) = 0$ pro $i \neq j$

Jelikož jinde $p_j(x_i) = 0$

2) $p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i p_i(x)$, potom platí: $p(x_i) = y_i p_i(x) = y_i$