Gramova matice

Věta: Nechť V je prostor se skalárním součinem a bazí $X = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$. Potom takzvaná *Gramova matice* $\boldsymbol{A}$ definovaná $a_{ij} = \langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle$ splňuje: $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V : \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = [\boldsymbol{w}]_X^H \boldsymbol{A}^T [\boldsymbol{u}]_X$

Všimněte si, že když je X ortonormální báze, pak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$.

Důkaz: Označme $[\boldsymbol{u}]_X = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, $[\boldsymbol{w}]_X = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, t.j. $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j$. Dostáváme

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle = [\boldsymbol{w}]_X^H \boldsymbol{A}^T [\boldsymbol{u}]_X$$

Vlastnosti Gramovy matice:

- Z $\langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}_j | \boldsymbol{v}_i \rangle}$ máme $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, t.j. matice je *hermitovská*
- Z $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle > 0$ pro $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ máme $[\boldsymbol{u}]_X^H \boldsymbol{A}^T [\boldsymbol{u}]_X > 0$.

Pozitivně definitní matice

Definice: Pokud hermitovská matice $\boldsymbol{A}$ řádu n vyhovuje $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{0} : \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$, pak je matice *pozitivně definitní*.

Aplikace:

- Hledání extrémů reálné funkce více proměnných — je-li (tzv. *Hessova*) matice získaná parciálními derivacemi druhého řádu pozitivně definitivní, pak jde o lokální minimum.
- Rozšíření optimalizačních programů.

Příklad: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ... ale jak lze podmínku $\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$ ověřit pro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0}$?

Cvičení: Ukažte, že pokud $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ jsou pozitivně definitní stejného řádu, pak $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{A}^{-1}$ jsou také pozitivně definitní.

Charakteristika pozitivně definitních matic

Věta: Pro hermitovskou matici $\boldsymbol{A}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitivní
2. $\boldsymbol{A}$ má všechna vlastní čísla kladná
3. Existuje regulární matice $\boldsymbol{U}$ taková, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{U}$

Choleského rozklad

Důkaz: $1 \Rightarrow 2$: Protože $\boldsymbol{A}$ je hermitovská, má vlastní čísla reálná. Nechť $\boldsymbol{x}$ je netriviální vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ. Potom $0 < \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x} = \lambda \langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle$. Z $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle > 0$ máme $\lambda > 0$.

$2 \Rightarrow 3$: Protože $\boldsymbol{A}$ je hermitovská, existují unitární $\boldsymbol{R}$ a diagonální $\boldsymbol{D}$ takové, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^H \boldsymbol{D} \boldsymbol{R}$. Vezměme diagonální $\tilde{\boldsymbol{D}} : \tilde{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$ a $\boldsymbol{U} = \tilde{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{R}$. Nyní $\boldsymbol{U}^H \boldsymbol{U} = (\tilde{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{R})^H \tilde{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^H \tilde{\boldsymbol{D}}^H \tilde{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^H \boldsymbol{D} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{U}$ je regulární, protože unitární i diagonální matice jsou regulární.

$3 \Rightarrow 1$: Pokud $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{0}$, pak $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, protože $\boldsymbol{U}$ je regulární. Nyní: $\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{U} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})^H \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} | \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} \rangle > 0$.

pak $\tilde{D} \cdot \tilde{D} = D$, resp. ; $\tilde{D}^H \tilde{D} = D$

Choleského rozklad

Věta: Pro každou pozitivně definitní matici $\boldsymbol{A}$ existuje *unikátní* horní trojúhelníková matice $\boldsymbol{U}$ s kladnou diagonálou taková, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{U}$. Matice $\boldsymbol{U}$ se nazývá *Choleského rozklad*.

Input: Hermitovská matice $\boldsymbol{A}$

Output: Choleského rozklad $\boldsymbol{U}$, pokud je $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}} u_{ki}}$$

if $u_{ii} \notin \mathbb{R}^+$ **then** STOP, $\boldsymbol{A}$ není pozitivně definitivní;

for $j = i+1, \ldots, n$ **do**

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}} u_{kj} \right)$$

end

end

Choleského rozklad, využití:

Řešení soustavy $\boxed{Ax = b}$

Z rozkladu víme: $A = U^H \cdot U$

$Ax = U^H U x = b$

$Ax = U^H y = b$

$y = Ux$

$Ux = y$

$U^H y = b$ --> Tedy vyřešíme první část, pak dosadíme výše a vyřešíme druhou část.

Příklad — Choleského rozklad

Pro danou hermitovskou matici $\boldsymbol{A}$ určete horní trojúhelníkovou matici $\boldsymbol{U}$ s kladnou diagonálou splňující: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{U}$

$$\begin{array}{c|c} & \boldsymbol{U} \\ \hline \boldsymbol{U}^H & \boldsymbol{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 2 & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline
2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\
-1 & 3 & 1 & 3 & -2 & 2 & 7 & 20
\end{array}$$

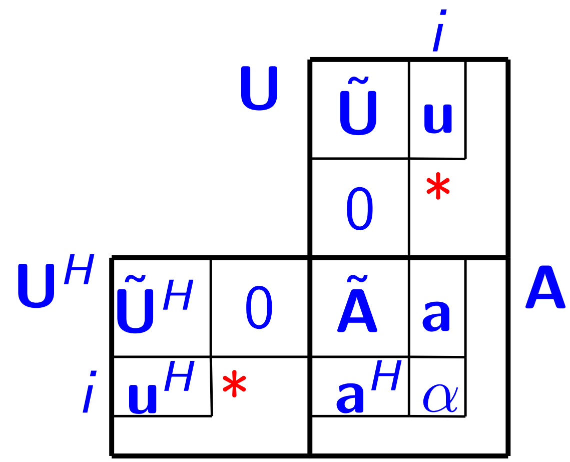
$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{ki}}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 2 & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 & & & & 0 & 0 & ? & . \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & . \\ \hline
2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & ? & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\
-1 & 3 & . & . & -2 & 2 & 7 & 20
\end{array}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{kj}\right)$$

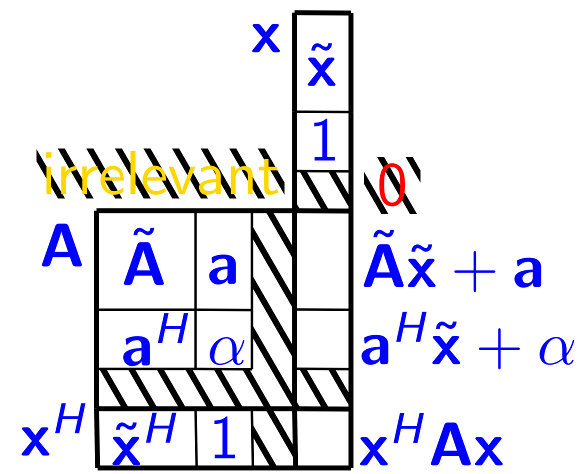
$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 2 & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & ? \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & . \\ \hline
2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\
-1 & 3 & . & . & -2 & 2 & 7 & 20
\end{array}$$

Správnost výpočtu Choleského rozkladu



Předpokládejme, že algoritmus selže $*$
během i-té iterace, tj. $\alpha \leq \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u}$.
Máme $\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{U}}^H \tilde{\boldsymbol{U}}$ a $\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{U}}^H \boldsymbol{u}$.

Nechť $\boldsymbol{x}^T = \boxed{\tilde{\boldsymbol{x}}^T \mid 1 \mid 0 \cdots 0}$ kde $\tilde{\boldsymbol{x}} = -\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u}$.



Nyní $\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} =$

$$= \tilde{\boldsymbol{x}}^H \tilde{\boldsymbol{A}} \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^H \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^H \tilde{\boldsymbol{x}} + \alpha$$

$$= (-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u})^H (\tilde{\boldsymbol{U}}^H \tilde{\boldsymbol{U}}) (-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u}) +$$

$$(-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u})^H (\tilde{\boldsymbol{U}}^H \boldsymbol{u}) + (\tilde{\boldsymbol{U}}^H \boldsymbol{u})^H (-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u}) + \alpha$$

$$= \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u} + \alpha = \alpha - \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u} \leq 0$$

Proto $\boldsymbol{A}$ není pozitivně definitní.

Rekurentní podmínka

Věta: Bloková matice $\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \boldsymbol{a}^H \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \\ \hline \end{array}$ je pozitivně definitní,

právě když $\alpha > 0$ a matice $\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H$ je pozitivně definitní.

Pozorování: Gaussova eliminace prvního sloupce pomocí prvního řádku dává v hermitovské matici: $\begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \boldsymbol{a}^H \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \\ \hline \end{array} \sim\sim \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \boldsymbol{a}^H \\ \hline \boldsymbol{0} & \tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H \\ \hline \end{array}$

Ukázka:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 7 & \frac{79}{4} \end{array}\right)$$

Rekurentní podmínka

Věta: Bloková matice $\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \boldsymbol{a}^H \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \\ \hline \end{array}$ je pozitivně definitní,

právě když $\alpha > 0$ a matice $\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H$ je pozitivně definitní.

Důsledek: Pozitivně definitní matice lze rozpoznat Gaussovou eliminací, ale sloupce je třeba eliminovat shora dolů odečítáním vhodných násobků řádku s pivotem od řádků pod ním,
tzn. nesmí se měnit pořadí řádků ani řádky násobit skalárem.

Pokud má výsledná horní trojúhelníková matice kladnou diagonálu, pak byla původní matice pozitivně definitní.

Ukázka:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{c|c|cc} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ \hline 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 7 & \frac{79}{4} \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & \frac{27}{2} \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{19}{2} \end{array}\right)$$

Rekurentní podmínka

Věta: Bloková matice $\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \boldsymbol{a}^H \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \\ \hline \end{array}$ je pozitivně definitní,

právě když $\alpha > 0$ a matice $\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H$ je pozitivně definitní.

Důsledek: Pozitivně definitní matice lze rozpoznat Gaussovou eliminací, ale sloupce je třeba eliminovat shora dolů odečítáním vhodných násobků řádku s pivotem od řádků pod ním, tzn. nesmí se měnit pořadí řádků ani řádky násobit skalárem.

Pokud má výsledná horní trojúhelníková matice kladnou diagonálu, pak byla původní matice pozitivně definitní.

Ukázka:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 7 & \frac{79}{4} \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{27}{2} \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

Rekurentní podmínka

Věta: Bloková matice $\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \boldsymbol{a}^H \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \\ \hline \end{array}$ je pozitivně definitní,

právě když $\alpha > 0$ a matice $\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H$ je pozitivně definitní.

Důkaz: $\Leftarrow$ Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \boldsymbol{0}$ znač. $\boldsymbol{x}^T = \begin{array}{|c|c|}\hline x_1 & \tilde{\boldsymbol{x}}^T \\ \hline \end{array}, x_1 \in \mathbb{C}, \tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{C}^{n-1}$.

$$\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \begin{array}{|c|c|}\hline \overline{x_1} & \tilde{\boldsymbol{x}}^H \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \boldsymbol{a}^H \\ \hline \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline x_1 \\ \hline \tilde{\boldsymbol{x}} \\ \hline \end{array} = \alpha x_1 \overline{x_1} + x_1 \tilde{\boldsymbol{x}}^H \boldsymbol{a} + \overline{x_1} \boldsymbol{a}^H \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^H \tilde{\boldsymbol{A}} \tilde{\boldsymbol{x}}$$
$$- \frac{1}{\alpha} \tilde{\boldsymbol{x}}^H \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H \tilde{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{\alpha} \tilde{\boldsymbol{x}}^H \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H \tilde{\boldsymbol{x}}$$
$$= \tilde{\boldsymbol{x}}^H (\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H) \tilde{\boldsymbol{x}} + (\sqrt{\alpha}\,\overline{x_1} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{\boldsymbol{x}}^H \boldsymbol{a})(\sqrt{\alpha}\, x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \boldsymbol{a}^H \tilde{\boldsymbol{x}})$$

Oba sčítance jsou nezáporné: $\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H$ je pozitivně definitní; následuje standardní skalární součin vektoru samého se sebou. Alespoň jeden je ryze kladný, jinak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Tedy $\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$.

$\Rightarrow$ Pro $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \boldsymbol{0}$ vezmeme $x_1 = -\frac{1}{\alpha} \boldsymbol{a}^H \tilde{\boldsymbol{x}}$ a $\boldsymbol{x}^T = \begin{array}{|c|c|}\hline x_1 & \tilde{\boldsymbol{x}}^T \\ \hline \end{array}$.

Dle našeho výběru: $\sqrt{\alpha}\, x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \boldsymbol{a}^H \tilde{\boldsymbol{x}} = 0$.

Nyní $0 < \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}^H (\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H) \tilde{\boldsymbol{x}} + 0 \cdot 0$

Proto $\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H$ je pozitivně definitní.

Též $\boldsymbol{e}^{1H} \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}^1 = \alpha > 0$.

Sylvesterova podmínka

Věta: Hermitovská matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je pozitivně definitní, právě když matice $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ mají kladné determinanty, kde $\boldsymbol{A}_i$ se sestává z prvních i řádků a sloupců $\boldsymbol{A}$.

Ukázka:

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_4| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{vmatrix} = 38 > 0$$

$$|\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$|\boldsymbol{A}_1| = \det(4) = 4 > 0$$

Všechny determinanty jsou kladné, proto je $\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní.

Sylvesterova podmínka

Věta: Hermitovská matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je pozitivně definitní, právě když matice $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ mají kladné determinanty, kde $\boldsymbol{A}_i$ se sestává z prvních i řádků a sloupců $\boldsymbol{A}$.

Důkaz: Použijeme Gaussovu eliminaci $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$ pro test, zda je $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní. Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou prvky na diagonále výsledné horní trojúhelníkové matice $\boldsymbol{A}'$.
Protože jsme eliminovali řádky shora dolů,
máme $\det(\boldsymbol{A}_i) = \det(\boldsymbol{A}'_i) = \prod_{j \le i} \alpha_j = \det(\boldsymbol{A}_{i-1})\alpha_i$.
$\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní $\Leftrightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$

$$\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{A}_1), \ldots, \det(\boldsymbol{A}_n) > 0.$$

Ukázka:

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{array} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 7 & \frac{79}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{27}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{2} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{A}'_1 \\ \mathbf{A}'_2 \\ \mathbf{A}'_3 \\ \mathbf{A}'_4 \end{array}$$