Determinanty

Determinant matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je:

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$$

Př.: pro $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ máme $S_2 = \{(1,2),(2,1)\}$

pro $p = (1,2)$ máme $sgn(p) = +1$ a $\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = a_{1,1} a_{2,2}$

pro $p = (2,1)$ máme $sgn(p) = -1$ a $\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = a_{1,2} a_{2,1}$

Proto:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (+1) \cdot a_{1,1} \cdot a_{2,2} + (-1) \cdot a_{1,2} a_{2,1}$$

Pro matice řádu tři máme šest možných permutací
$S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$

permutace $p = (1,2,3), (2,3,1)$ a $(3,1,2)$ mají $sgn(p) = +1$
permutace $p = (1,3,2), (2,1,3)$ a $(3,2,1)$ mají $sgn(p) = -1$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{matrix} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \end{matrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{2,2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{3,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & a_{1,2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{2,3} \\ a_{3,1} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a_{1,3} \\ a_{2,1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{3,2} & \cdot \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{2,3} \\ \cdot & a_{3,2} & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & a_{1,2} & \cdot \\ a_{2,1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{3,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a_{1,3} \\ \cdot & a_{2,2} & \cdot \\ a_{3,1} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{matrix} + \\ \\ - \end{matrix} \left| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}$$

Jen pro matice 3×3 *!!!*

Pro trojúhelníkové matice je

$$\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}$$

– tedy součin diagonály, permutace je jen identita

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Pro $p \in S_n$: $p(i) = j \iff p^{-1}(j) = i$

$$\det(A^T) = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} (A^T)_{i,p(i)} = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{p(i),i} = \sum_{p^{-1} \in S_n} sgn(p^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,p^{-1}(j)} = \det(A)$$

Pro přerovnání sloupců podle q platí: Pro $q \in S_n$ a $B: b_{i,j} = a_{i,q(j)}$: $\det(B) = \det(A) \cdot \mathrm{sgn}(q)$

$$\det(B) = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} b_{i,p(i)} = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(p(i))} =$$

$$\sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(q)\,\mathrm{sgn}(q)\,\mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,(q \circ p)(i)} =$$

$$\mathrm{sgn}(q) \sum_{r \in S_n} \mathrm{sgn}(r) \prod_{i=1}^{n} a_{i,r(i)} = \mathrm{sgn}(q) \cdot \det(A)$$

pro $r = q \circ p$ je $p \to r$ bijekce na S_n.

Nechť k a k' řádky se rovnají.
Pak mám $p \in S_n$, $q = p \circ (k,k')$,
pak $\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(i)}$,
ale $\mathrm{sgn}(p) = -\mathrm{sgn}(q)$!

Důsledek:

Výměna dvou řádků změní determinant

Pokud má A dva stejné řádky/sloupce, $\det(A) = 0$

Linearita determinantu.

Věta: Determinant matice je LZ v každém jejím řádku a sloupci:

řádku a sloupci, tj. vzhledem k skalárnímu násobku řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t \cdot a_{i,1} & t \cdot a_{i,2} & \cdots & t \cdot a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

a vzhledem ke sčítání řádků:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1}+c_{i,1} & b_{i,2}+c_{i,2} & \cdots & b_{i,n}+c_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & c_{i,2} & \cdots & c_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Pro skalární násobek:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \\ t \cdot a_{i,1} & \cdots & t \cdot a_{i,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) \left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} \right) \cdot t \right) = t \cdot \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$$

Pro součet:

Pokud matice A, B, C splňují:

$$a_{k,j} = \begin{cases} b_{i,j} + c_{i,j} & \text{když } k = i \\ b_{k,j} = c_{k,j} & \text{když } k \neq i \end{cases}$$

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{n} a_{k,p(k)} = \sum_{p \in S_n} a_{i,p(i)} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} a_{k,p(k)}$$

$$= \sum_{p \in S_n} \left(b_{i,p(i)} + c_{i,p(i)} \right) \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} a_{k,p(k)}$$

$$= \sum_{p \in S_n} b_{i,p(i)} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} b_{k,p(k)} + \sum_{p \in S_n} c_{i,p(i)} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} c_{k,p(k)}$$

$$= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{n} b_{k,p(k)} + \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{n} c_{k,p(k)}$$

$$= \det(B) + \det(C)$$

Důkaz pro součet

Pokud matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ splňují

$$a_{k,j} = \begin{cases} b_{i,j} + c_{i,j} & \text{když } k = i \text{ a} \\ b_{k,j} = c_{k,j} & \text{když } k \neq i, \text{ pak} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}) &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{n} a_{k,p(k)} \\
&= \sum_{p \in S_n} a_{i,p(i)} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} a_{k,p(k)} \\
&= \sum_{p \in S_n} \left(b_{i,p(i)} + c_{i,p(i)} \right) \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} a_{k,p(k)} \\
&= \sum_{p \in S_n} b_{i,p(i)} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} b_{k,p(k)} \\
&+ \sum_{p \in S_n} c_{i,p(i)} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} c_{k,p(k)} \\
&= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{n} b_{k,p(k)} + \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{n} c_{k,p(k)} \\
&= \det(\boldsymbol{B}) + \det(\boldsymbol{C})
\end{aligned}$$

Důsledek: přičtením t-násobku řádku k jinému se determinant nezmění, analogicky pro sloupce.

$$\begin{vmatrix} — a_{i,\bullet} + t \cdot a_{j,\bullet} — \\ — a_{j,\bullet} — \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} — a_{i,\bullet} — \\ — a_{j,\bullet} — \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} — a_{j,\bullet} — \\ — a_{j,\bullet} — \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} — a_{i,\bullet} — \\ — a_{j,\bullet} — \end{vmatrix}$$

Důsledek: Je-li A singulární $\Rightarrow \det(A) = 0$

$-L2$ řádek vynuluji a pak $\det(A) = 0$

Pro libovolné $A, B \in \mathbb{T}^{n \times n}$: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

A i B jsou regulární, jinak dostaneme $0 = 0$

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

- při přičtení řádku: $\det(E) = 1$
- při vynásobení řádku t-krát: $\det(E) = t$

Rozložíme reg. A na el. matice: $A = E_1 \dots E_k$

$$\det(AB) = \det(E_1 \dots E_k B) = \det(E_1) \cdot \det(E_2 \dots E_k B) =$$
$$\det(E_1) \dots \det(E_k) \det(B) = \det(E_1 \dots E_k) \det(B) =$$
$$= \det(A) \det(B)$$

Důsledek:

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

Důsledek:

A je reg. $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{c} + \\ \\ - \end{array} \left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}$$

Jen pro matice 3×3 !!!

Laplaceův rozvoj:

Pro libovolnou $A \in K^{n \times n}$ a jakékoli $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \det(A^{i,j})$$

Vyjádřím i-tý řádek jako lin. komb. vekt. kan. báze (transp. do řádku) a použijeme linearitu

$$(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots a_{i,n}) = a_{i,1} e_1^T + a_{i,2} e_2^T + \dots + a_{i,n} e_n^T$$

přehození v det je změnění znaménka!

$$(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}) = a_{i,1}(\mathbf{e}^1)^T + a_{i,2}(\mathbf{e}^2)^T + \dots + a_{i,n}(\mathbf{e}^n)^T$$

$$\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ a_{i,1} \; a_{i,2} \; \dots \; a_{i,n} \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = a_{i,1} \begin{vmatrix} \cdots\cdots \\ 1 \; 0 \dots 0 \\ \cdots\cdots \end{vmatrix} + a_{i,2} \begin{vmatrix} \cdots\cdots \\ 0 \; 1 \; 0 \dots 0 \\ \cdots\cdots \end{vmatrix} + \dots + a_{i,n} \begin{vmatrix} \cdots\cdots \\ 0 \dots 0 \; 1 \\ \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$j\text{-tý člen: } \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ 0 \dots 0 \; 1 \; 0 \dots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots\cdots \\ — (\mathbf{e}^j)^T — \\ \cdots\cdots \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} — (\mathbf{e}^j)^T — \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1+j+1} \begin{vmatrix} — (\mathbf{e}^1)^T — \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{i,j} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}^{i,j})$$

$$\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ a_{i,1} \; a_{i,2} \; \cdots \; a_{i,n} \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = a_{i,1} \begin{vmatrix} \cdots \\ 1 \; 0 \; 0 \cdots 0 \\ \cdots \end{vmatrix} + a_{i,2} \begin{vmatrix} \cdots \\ 0 \; 1 \; 0 \cdots 0 \\ \cdots \end{vmatrix} + \dots + a_{i,n} \begin{vmatrix} \cdots \\ 0 \cdots 0 \; 1 \\ \cdots \end{vmatrix}$$

$$j\text{-tý člen: } \begin{vmatrix} \cdots \\ 0 \cdots 0 \; 1 \; 0 \cdots 0 \\ \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots \\ — (e^j)^T — \\ \cdots \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} — (e^j)^T — \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+1+j+1} \begin{vmatrix} — (e^1)^T — \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & A^{i,j} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det(A^{i,j})$$

což ve výsledku bude tvořit jeden ze sčítanců celkového determinantu.

Adjungovaná matice:

Pro matici $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ je $\mathrm{adj}(A) = (-1)^{i+j} \det(A^{ji})$ → pozor, prohozené indexy

Pro libovolnou reg. matici platí:

$$A \in \mathbb{K}^{n \times n}: \; A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

Laplaceovým rozvojem det(A):

(i-tý řádek z A) · (i-tý sloupec z adj(A)) = det(A)

(j-tý řádek z A) · (i-tý sloupec z adj(A)) = det(A') = 0

A' = A s nahrazením i-tého řádku za j-tý.

Tedy: $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)\right) = I_n$

Adjungovaná matice — ukázka

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Podle Sarrusova pravidla:
$\det(\boldsymbol{A}) = 9 + 50 + 0 - 45 - 0 - 12 = 2$

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} . & 2 & 5 \\ * & . & . \\ . & 5 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2a5 \\ 5a3 \end{vmatrix} = 19$$

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 9 & 19 & -15 \\ -6 & -12 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

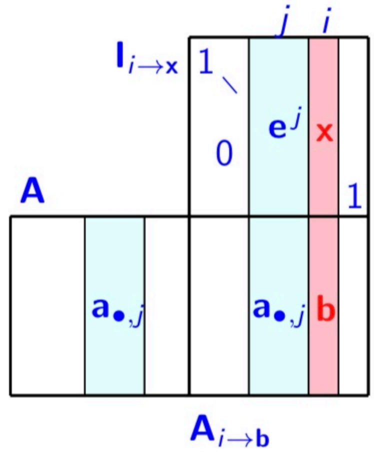
$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \mathrm{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 9/2 & 19/2 & -15/2 \\ -3 & -6 & 5 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je reg. Pro jakékoli $b \in \mathbb{R}^n$ platí, že řešení x soustavy $Ax = b$ splňuje $x_i = \frac{1}{\det(A)} \det(A_{i \to b})$, kde $A_{i \to b}$ je matice A, která má i-tý sloupec nahrazený vektorem b.

Uvažujme matici $I_{i \to x}$ získanou z I_n.

Důkaz: Uvažme matici $\boldsymbol{I}_{i\to \boldsymbol{x}}$ získanou z $\boldsymbol{I}_n$ nahrazením i-tého sloupce vektorem $\boldsymbol{x}$.



věta o součinu determinantu

Potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I}_{i\to\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_{i\to\boldsymbol{b}}$,
tedy $\det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{I}_{i\to\boldsymbol{x}}) = \det(\boldsymbol{A}_{i\to\boldsymbol{b}})$,
proto $x_i = \det(\boldsymbol{I}_{i\to\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\det(\boldsymbol{A}_{i\to\boldsymbol{b}})$.

tady dostanu A jen se změněným i-tým řádkem, díky chování násobení matice jednotkovou maticí.

Cramerovo pravidlo — ukázka

Soustavu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} = (7,4,9)^T$ lze vyřešit pomocí determinantů:

$$\det(\boldsymbol{A}_{1\to\boldsymbol{b}}) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4, \qquad \det(\boldsymbol{A}_{2\to\boldsymbol{b}}) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det(\boldsymbol{A}_{3\to\boldsymbol{b}}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2$$

Proto $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\big(\det(\boldsymbol{A}_1), \det(\boldsymbol{A}_2), \det(\boldsymbol{A}_{3\to\boldsymbol{b}})\big)$
$= \frac{1}{2}(4,0,2)^T = (2,0,1)^T$

Zkouška:

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Pro $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ je objem rovnoběžnostěnu P daného $x_1 \dots x_n$ roven $|\det(A)|$, kde vektory $x_1 \dots x_n$ tvoří sloupce matice A.

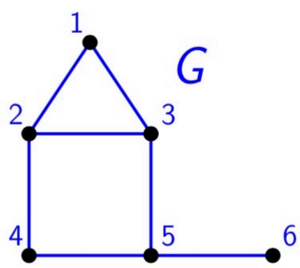
Výpočet koster grafu:

Laplaceova matice grafu G na $V_G = \{v_1 \dots v_n\}$ je $L_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že:

$$(L_G)_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pro } i = j \\ -1 & \text{jestliže } i \neq j \text{ a } (v_i, v_j) \in E_G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Každý G na alespoň dvou vrcholech má $\det(L_G^{1,1})$ koster!

L_G je singulární: jelikož mám stupeň vrcholu na diagonále, ale pak musíme mít i stejný počet násobností v dalších položkách toho sloupce.



Laplaceova matice

$$L_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

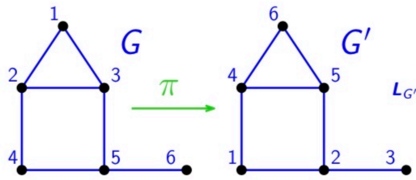
$$\det(L_G^{1,1}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$\det(L_G^{2,1}) = -\det(L_G^{2,2})$, stejně to funguje se sloupci

→ pro libovolné $i, j \in \{1, \dots n\}$: $\det(L_G^{i,j}) = (-1)^{i+j} \det(L_G^{1,1})$

Laplaceovy matice izomorfních grafů

$$\boldsymbol{L}_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{L}_{G'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{L}_G^{1,1}) = \det(\boldsymbol{L}_{G'}^{6,6}) = \det(\boldsymbol{L}_{G'}^{1,1})$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Matice $\boldsymbol{L}_G^{1,1}$, $\boldsymbol{L}_{G'}^{6,6}$ se liší pouze permutací *řádků a sloupců* podle π.
Toto π se aplikuje dvakrát: na řádky a na sloupce.
I když $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$, celkové znaménko determinantu se nezmění.

Důkaz

Věta: Každý multigraf G s $|V_G| \geq 2$ splňuje $\kappa(G) = \det(\boldsymbol{L}_G^{1,1})$.

Důkaz: B.ú.n.o. G je souvislý. Indukcí podle $m = |E_G|$.

Základ indukce: pro $m = 1$ má G jen dva vrcholy a $\kappa(G) = 1 = \deg(v_2) = (\boldsymbol{L}_G)_{2,2} = \det(\boldsymbol{L}_G^{1,1})$.

Indukční krok: Zvolme libovolnou $e \in E_G$, b.ú.n.o. $e = (v_1, v_2)$.

Označme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_G^{1,1}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}_{G-e}^{1,1}$ a $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{L}_{G\circ e}^{1,1} = \boldsymbol{A}^{1,1} = \boldsymbol{B}^{1,1}$
... $\boldsymbol{C}$ je podmatice $\boldsymbol{L}_G$ odpovídající $v_3, \ldots, v_n$.

Z indukčního předpokladu $\kappa(G-e) = \det(\boldsymbol{B})$, $\kappa(G \circ e) = \det(\boldsymbol{C})$.

Matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou shodné kromě $b_{1,1} = a_{1,1} - 1$, protože vypuštěním e klesne stupeň v_2 o 1. První sloupec $\boldsymbol{A}$ vyjádříme jako součet prvního sloupce $\boldsymbol{B}$ a vektoru $\boldsymbol{e}^1$.

Linearitou $\det(\boldsymbol{A})$ podél tohoto rozkladu prvního sloupce získáme $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B}) + \det(\boldsymbol{C})$. Nyní dokončíme:

$$\kappa(G) = \kappa(G-e) + \kappa(G \circ e) = \det(\boldsymbol{L}_{G-e}^{1,1}) + \det(\boldsymbol{L}_{G\circ e}^{1,1}) = \det(\boldsymbol{L}_G^{1,1})$$

Kostry úplných grafů — Cayleyho vzorec

Věta: Úplný graf K_n má n^{n-2} koster.

Důkaz:

$$\kappa(K_n) = \det(\boldsymbol{L}_{K_n}^{1,1}) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -n & n & 0 & \dots & 0 \\ -n & 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$