1) Determinant matice je LZ na každém řádku a sloupci, t.j.

1)
$$B = \begin{vmatrix} — a_{1,*} — \\ \vdots \\ — t\cdot a_{i,*} — \\ \vdots \\ — a_{n,*} — \end{vmatrix} = t \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} — a_{1,*} — \\ \vdots \\ — a_{i,*} — \\ \vdots \\ — a_{n,*} — \end{vmatrix}}_{A}$$

&

2)
$$\begin{vmatrix} — a_{1,*} — \\ — a_{i,*} + b_{i,*} — \\ — a_{n,*} — \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} — a_{1,*} — \\ — a_{i,*} — \\ — a_{n,*} — \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} — a_{1,*} — \\ — b_{i,*} — \\ — a_{n,*} — \end{vmatrix}$$

1)
$$\det(B) = \sum_{p\in S_n} sgn(p)\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}\right)\cdot t = t\cdot \sum_{p\in S_n} sgn(p)\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = t\cdot\det(A)$$

2) Nechť je v každém součtu jeden prvek z matice A a řádek se součtem je i-tý

$$\det(A + e_i b^T) = \sum_{p\in S_n} sgn(p)\prod_{j\neq i}^{n} a_{j,p(j)}\cdot\left(a_{i,p(i)} + b_{i,p(i)}\right) = \sum_{p\in S_n} sgn(p)\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} + \sum_{p\in S_n} sgn(p)\left(\prod_{j\neq i}^{n} a_{j,p(j)}\right)\cdot b_{i,p(i)}$$

$$= \det(A) + \det\left(A + e_i\left(b^T - A_{i,*}\right)\right)$$

2) $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

Buno A, B jsou regulární, jinak $0=0$

Součin s elementární maticí zachovává determinant, jelikož: $\det(EB) = \det(E)\cdot\det(B)$

- přičtení i-tého řádku k j-tému $\Rightarrow$ z linearity se determinant nemění, resp. $\det(E) = 1$
- vynásobení i-tého řádku t $\Rightarrow$ z linearity se determinant změní faktorem t: $\det(E) = t$

Rozložím regulární A na součin elementárních matic $E_1 \ldots E_k$.

$$\det(AB) = \det(E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_k\cdot B) = \det(E_1)\cdot\det(E_2\cdot\ldots\cdot E_k\cdot B) = \det(E_1)\cdot\det(E_2)\cdot\ldots\cdot\det(B) =$$
$$\det(E_1\ldots E_k)\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B).$$

3) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a jakékoli $i \in \{1\ldots n\}$ platí že:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,(-1)^{i+j}\cdot\det(A^{i,j})$$

Vyjádřím i-tý řádek jako lin. komb. vekt. kanonické báze a použijeme linearitu:

$$(a_{i,1}; a_{i,2}; \dots; a_{i,n}) = a_{i,1}\cdot e_1^T + a_{i,2}\cdot e_2^T + \dots a_{i,n}\cdot e_n^T$$

$$\begin{vmatrix} \dots \\ a_{i,1} \dots a_{i,n} \\ \dots \end{vmatrix} = a_{i,1} \begin{vmatrix} \dots \\ 1\,0 \dots 0 \\ \dots \end{vmatrix} + \dots + a_{i,n} \begin{vmatrix} \dots \\ 0 \dots 0\,1 \\ \dots \end{vmatrix}$$

Přeuspořádám řádky:

$$\begin{vmatrix} \dots \\ - e_j^T - \\ \dots \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \cdot \begin{vmatrix} - e_j^T - \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} = (-1)^{i+1+j+1} \begin{vmatrix} - e_1^T - \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & A^{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$$

Takto mohu přeuspořádat všechny řádky

4) Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární matice. Pro jakékoliv $b \in \mathbb{R}^n$ řešení x soustavy $Ax = b$ splňuje $x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A_{i\to b})$ ($A_{i\to b}$ má i-tý sloupec nahrazený vektorem b)

Uvažme matici $I_{i\to x}$. $A \cdot I_{i\to x} = A_{i\to b}$.

Pak $\det(A) \cdot \det(I_{i\to x}) = \det(A_{i\to b})$

$$x_i = \det(I_{i\to x}) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A_{i\to b})$$

5) Pro regulární matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$ Laplaceův rozvoj říká: $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$

Pomocí Laplaceova rozvoje $\det(A)$:

(i-tý řádek z A) $\cdot$ (i-tý sloupec z $\operatorname{adj}(A)$) $= \det(A)$

pro $i \neq j$

(j-tý řádek z A) $\cdot$ (i-tý sloupec z $\operatorname{adj}(A)$) $= \det(A') = 0$ obsahuje dva stejné sloupce, tedy $\det(A) = 0$

kde $A' = A_{i\to j}$

Tedy $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n \implies A \cdot \left(\frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}\right) = I_n$

6) Každý multigraf G s $|V_G| \geq 2$: $\kappa(G) = \det(L_G^{1,1})$

Nechť G je souvislý. Indukcí podle $m = |E_G|$.

$m = 1$:

G má jen dva vrcholy, $\kappa(G) = 1 = \deg(v_2) = (L_G)_{2,2} = \det(L_G^{1,1})$

Zvolme libovolnou $e \in E_G : e = (v_1, v_2)$

$A = L_G^{1,1}$, $B = L_{G-e}^{1,1}$, $C = L_{G \circ e}^{1,1}$. $\det(B) = \kappa(G-e)$, $\det(C) = \kappa(G \circ e)$

A a B jsou shodné, jen $b_{1,1} = a_{1,1} - 1$ (o stupeň míň).

C je kopie $B^{1,1}$ a zároveň A je lin. komb. B a C, tedy když C rozšíříme o e_1, můžu $\det(A)$ rozložit:

$\det(A) = \det(B) + \det(C) \Rightarrow \kappa(G) = \det(L_{G-e}^{1,1}) + \det(L_{G \circ e}^{1,1}) = \det(L_G^{1,1})$

7)

Nechť $\mathbb{Z}_p$ je konečné těleso a $a \in \mathbb{Z}_p$.

Pak $a^{p-1} = 1$, tedy $a^p = a$.

Zobrazení $i \to xi$ je bijekce na $\mathbb{Z}_p$, tedy

$$\cancel{\prod_{i=1}^{p-1} i} = \prod_{i=1}^{p-1} xi = x^{p-1} \cdot \cancel{\prod_{i=1}^{p-1} i}$$

$$1 = x^{p-1}$$

8) Vandermondova matice je regulární $\iff$ $x_0 \dots x_n$ jsou různé.

$$V_{n+1}(x_0 - x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

- odečteme první řádek od ostatních
- vytkneme $(x_i - x_0)$ $\forall i$ z itého řádku
- V prvním sloupci je „n" nul, takže můžu rozvíst determinant.

$$\det(V_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 & \dots x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2 & \dots x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & x_n^2 + x_n x_0 + x_0^2 & \dots x_n^{n-1} + x_n^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1} \end{vmatrix}$$

- nyní odzadu odečteme od $\forall$ sloupce x_0-násobek předchozího. Tak se zbavíme členu x_0.

Nyní máme rekurenci: $\mathrm{Det}(V_{n+1}(x_0 - x_n)) = \left(\prod_{i=1}^{n} (x_i - x_0) \cdot \det(V_n(x_1 - x_n))\right) = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$

→ pokud budou dvě čísla stejná, bude $\det(A) = 0$ => pak A není regulární.

9) Určíme n+1 pomocných polynomů stupně n:

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

↗ y_i je hodnota v odpovídajícího bodu.

Sestavíme $p(x)$ jako lin. komb.: $p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i p_i(x)$

Platí, že $p(x_i) = y_i p_i(x_i) = y_i$, protože $p_i(x_i) = 1$, $p_i(x_j) = 0 : i \neq j$

10) Vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu číslu tvoří podprostor.

Uvažme vlastní číslo λ lin. zobr. $f: V \to V$ a množinu $U = \{u \in V : f(u) = \lambda u\}$

Pro $\forall u, v \in U$ a $a \in \mathbb{K}$ dostaneme:

- $f(au) = af(u) = a\lambda u = \lambda(au)$
- $f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$

↗ ověříme uzavřenost na násobení a sčítání

11) Nechť $f: V \to V$ je lin. zobr. a $\lambda_1 - \lambda_n$ jsou různá vlastní čísla a $u_1 - u_n$ odpovídající netriviální vlastní vektory. Potom $u_1 - u_n$ jsou LNZ.

Sporem: Nechť k je nejmenší číslo, pro které platí: $\lambda_1 - \lambda_k$ a $u_1 - u_k$ t.ž.

$a_1 - a_k \in \mathbb{K} \setminus 0 : \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0$ → tedy že jsou LZ

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i u_i$$

$$0 = \lambda_k 0 = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_k u_i$$

$$0 = 0 - 0 = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_k u_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) a_i u_i .$$

– jelikož $\lambda_i \neq \lambda_k$, dostaneme $(\lambda_i - \lambda_k) a_i \neq 0$, tedy už $u_1 - u_{k-1}$ jsou LZ ! Spor s minimalitou.

12) Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ <=> λ je kořenem char. polynomu $p_A(t)$.

λ je vlastní číslo A <=>

<=> $\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : Ax = \lambda x$

<=> $\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : 0 = Ax - \lambda x = Ax - \lambda I_n x = (A - \lambda I_n)x$

<=> $(A - \lambda I_n)$ je singulární

<=> $\det(A - \lambda I_n) = 0 = p_A(\lambda)$

— tedy λ je kořenem

13) Pro $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ platí:

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1 A + a_0 I_n = O_n$$

Použijeme $M \cdot adj(M) = det(M)\cdot I_n$ pro $M = A - tI_n$

Složky $adj(A-tI_n)$ jsou det. podmatic, tj. polynomy stupně nejvýš $t-1$

$Adj(A-tI_n) = t^{n-1}B_{n-1} + \dots + tB_1 + B_0$ pro $B_{n-1} - B \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$(A-tI_n)\cdot(t^{n-1}B_{n-1}+\dots+tB_1+B_0) = p_A(t)\cdot I_n = (-1)^n t^n I_n + a_{n-1}t^{n-1}I_n + \dots + a_1 t I_n + a_0 I_n$$

Koeficienty u:

t^n: $-B_{n-1} = (-1)I_n$ · A^n zleva

t^i $AB_i - B_{i-1} = a_i I_n$ · A^i zleva

t^0 $AB_0 = a_0 I_n$

Levá strana:

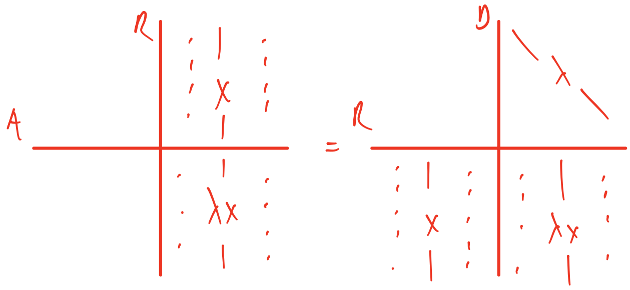
$$-A^n B_{n-1} + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + A(AB_1 - B_0) + AB_0 = O_n$$

Pravá strana:

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I_n = p_A(A)$$

14) Matice $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ je podobná diagonální matici <=> prostor $\mathbb{K}^n$ má bázi z vlastních vektorů matice A.

$AR = RD$ s diagonální maticí D, pokud $\forall i$: $\exists$ vektor x t.ž. $Ax = \lambda x = d_{ii} x$



15) Každá Hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná. Navíc existuje unitární R taková, že $R^{-1}AR$ je diagonální.

Indukcí podle n:

$n=1$

Triviálně platí.

V $\mathbb{C}^n$ má matice A_n eigenvalue s eigenvectorem.
Vektor znormalizujeme faktorem $\frac{1}{\sqrt{x^H x}}$

Tento vektor doplníme na unitární matici P_n. $P_n^H A P_n$ je hermitovská.

Jelikož $A_n x = \lambda x$, matice $A_n P_n$ má λx jako první sloupec. Protože P_n unitární:

první sloupec $P_n^H A_n P_n$ je $P_n^H A_n x = P_n^H(A_n x) = P_n^H(\lambda x) = \lambda P_n^H x = (\lambda, 0, \dots, 0)^T$.

Proto $P_n^H A_n P_n = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right)$, kde A_{n-1} je hermitovská. Hermitovská matice má na diagonále reálná čísla, tedy λ je reálné.

Podle IP. $R_{n-1}^{-1} A_{n-1} R_{n-1} = D_{n-1}$ pro unitární R_{n-1} a diagonální D.

$R_n = P_n \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}\right)$, součin unitární matice je stále unitární. Nyní:

$$R_n^{-1} A_n R_n = R_n^H A_n R_n = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^H \end{array}\right) \cdot P_n^H \cdot A_n \cdot P_n \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^H \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0^T \\ \hline 0 & D_{n-1} \end{array}\right) = D$$

16) $\forall u, v \in \mathbb{C}^n : |\langle u|v\rangle| \leq \sqrt{\langle u|u\rangle \cdot \langle v|v\rangle}$, t.z. $|\langle u|v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Pro $u, v = 0$ dostaneme $0 = 0$

$\forall a \in \mathbb{C} : \|u + av\|^2 \geq 0$ $\longrightarrow$ druhá mocnina není nikdy záporná

$$\|u+av\|^2 = \langle u+av | u+av\rangle = \langle u|u+av\rangle + a\langle v|u+av\rangle = \langle u|u\rangle + \bar{a}\langle u|v\rangle + a\langle v|u\rangle + a\cdot\bar{a}\langle v|v\rangle$$

nechť $a = -\frac{\langle u|v\rangle}{\langle v|v\rangle}$

$$0 \leq \langle u|u\rangle - \frac{\langle u|v\rangle}{\langle v|v\rangle} \cdot \langle v|u\rangle$$

$$\langle u|v\rangle \cdot \langle v|u\rangle \leq \langle u|u\rangle \cdot \langle v|v\rangle$$

$$|\langle u|v\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

17) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$\langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle \leq 2 \cdot |\langle v|u\rangle|$

$$\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v|u+v\rangle} = \sqrt{\langle u|u\rangle + \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle + \langle v|v\rangle} \leq \sqrt{\langle u|u\rangle + 2\cdot|\langle v|u\rangle| + \langle v|v\rangle} =$$

$$\sqrt{\|u\|^2 + 2|\langle u|v\rangle| + \|v\|^2} \leq \sqrt{\|u\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2} = \|u\| + \|v\|$$

18) Nechť Z je ortonormální báze prostoru V. $\forall u \in V$: $u = \langle u|v_1\rangle v_1 + \dots + \langle u|v_n\rangle v_n$.

Koeficienty $\langle u|v_i\rangle$ se nazývají Fourierovy.

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \Rightarrow \langle u|v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \,\middle|\, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i|v_j\rangle = a_i$$

~~18)~~ 18+) Nechť Z je ortonormální báze prostoru V se sk. součinem. $\forall u,v \in V$: $\langle u|v\rangle = [w]_Z^H [u]_Z$

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i\rangle v_i \quad \text{a} \quad w = \sum_{j=1}^{n} \langle w|v_j\rangle v_j$$

$$\langle u|v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i\rangle v_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \langle w|v_j\rangle v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle u|v_i\rangle \overline{\langle w|v_j\rangle} \langle v_i|v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i\rangle \overline{\langle w|v_i\rangle} = [w]_Z^H [u]_Z$$

19) Převod libovolné báze $U = (u_1 \dots u_n)$ na ortogonální $V = (v_1 \dots v_n)$

For $i = 1 \dots n$:

1. $w_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle u_i|v_j\rangle v_j$ ← odečtení kolmé projekce ostatních vektorů ortogonální báze
2. $v_i = \frac{1}{\|w_i\|} \cdot w_i$ ← normalizace vektoru

19 - lemma o kolmosti:

Nechť P_Z je ortogonální projekce W na V. Potom $u - P_Z(u) \perp v_i : \forall v_i \in Z$, kde Z je báze podprostoru V.

$$\langle u - P_Z(u)|v_i\rangle = \langle u|v_i\rangle - \langle P_Z(u)|v_i\rangle = \langle u|v_i\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle u|v_j\rangle v_j \,\middle|\, v_i \right\rangle = \langle u|v_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle u|v_j\rangle \cdot \langle v_j|v_i\rangle =$$

$$\langle u|v_i\rangle - \langle u|v_i\rangle = 0$$

1) Díky lemma o kolmosti:

→ již znormalizované vektory ortogonální báze

$$w_i \perp v_j \;\; \forall j : j < i \Rightarrow v_i \perp v_j : i \neq j$$

projekce před normalizací

2) $\|v_i\| = \left\| \frac{1}{\|w_i\|} w_i \right\| = \frac{\|w_i\|}{\|w_i\|} = 1$

3) Díky lemma o výměně: $\text{span}(v_1 \dots v_{n-1}, u_n) = \text{span}(v_1 \dots v_{n-1}, w_n) = \text{span}(v_1 \dots v_{n-1}, v_n)$

20) Zobrazení $f: U \to V$ je isometrie $\iff$ $\|u\| = \|f(u)\|$

$\Rightarrow$ $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{\langle f(u)|f(u)\rangle} = \|f(u)\|$

$\overline{\langle u+av|u\rangle}$ $\qquad$ $\overline{\langle u+av|v\rangle}$

$\langle u+av|u+av\rangle = \langle u|u+av\rangle + a\langle v|u+av\rangle = \langle u|u\rangle + \bar{a}\langle u|v\rangle + a\langle v|u\rangle + a\bar{a}\langle v|v\rangle$

$\Leftarrow$

$$\|u+av\|^2 = \|u\|^2 + a\langle v|u\rangle + \bar{a}\langle u|v\rangle + a\bar{a}\|v\|^2$$

$$\|f(u+av)\|^2 = \|f(u)\|^2 + a\langle f(v)|f(u)\rangle + \bar{a}\langle f(u)|f(v)\rangle + a\bar{a}\|f(u)\|^2$$

$a=1$ $\quad \langle v|u\rangle + \langle u|v\rangle = \langle f(v)|f(u)\rangle + \langle f(u)|f(v)\rangle$

$a=i$ $\quad \langle v|u\rangle - \langle u|v\rangle = \langle f(v)|f(u)\rangle - \langle f(u)|f(v)\rangle$

$\Rightarrow \langle u|v\rangle = \langle f(u)|f(v)\rangle$

21) Nechť V a W jsou prostory se sk. součinem konečné dimenze a X, Y jejich ortonormální báze. Lin. zobr. $f: V \to W$ je bijektivní isometrie $\iff$ $[f]_{XY}$ je unitární.

Protože X, Y jsou ortonormální: $\langle x_i|x_j\rangle = 0 : i \neq j$

$$\langle u|w\rangle = [w]_X^H [u]_X$$

$$\langle f(u)|f(w)\rangle = [f(w)]_Y^H [f(u)]_Y = [w]_X^H [f]_{XY}^H \cdot [f]_{XY} [u]_X$$

Obecně platí: $x^T y = x^T A y$, pokud $A = I_n$, tedy $[f]_{XY}^H \cdot [f]_{XY} = I_n$, jinými slovy že je unitární.

22) Pro konečně generovaný prostor W se sk. součinem a podprostor V platí:

$$(V^\perp)^\perp = V \quad \text{a} \quad \dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(W)$$

Zvolím si ortonormální bázi prostoru V a doplním ji na ortonormální bázi Z prostoru W.

Nechť $Y = Z \setminus X$, $X = (x_1 \dots x_k)$, $Y = (y_1 \dots y_l)$ Y bude ten doplněk.

$\forall u \in \mathrm{span}(X) \perp \forall v \in \mathrm{span}(Y)$. $\langle u|v\rangle = \langle \sum_{i=1}^k a_i x_i | \sum_{j=1}^l b_j y_j\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_i \bar{b}_j \langle x_i|y_j\rangle = 0$

Proto $\mathrm{span}(Y) \subseteq V^\perp$

Nechť $w \in V^\perp$. Určíme $[w]_Z$. Jelikož Z je ortonormální, půjde o Fourierovy koeficienty.

$\langle w|x_i\rangle = 0$ $\forall x_i \in X$, tedy $w \in \mathrm{span}(Y)$. Proto $\mathrm{span}(Y) \supseteq V^\perp$.

Celkem $\mathrm{span}(Y) = V^\perp$.

$\dim(V) + \dim(V^T) = |X| + |Y| = |Z| = \dim(W)$

23) Nechť V je prostor se sk. součinem a bazí $X = (v_1 \dots v_n)$. Potom takzvaná Gramova matice A definovaná $a_{i,j} = \langle v_i | v_j \rangle$ splňuje: $\forall u, w \in V: \langle u|w \rangle = [w]_X^H A^T [u]_X$

$[u]_X = (\alpha_1 \dots \alpha_n)^T$, $[w]_X = (\beta_1 \dots \beta_n)^T$, tj. $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $w = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$

$$\langle u|v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j \langle v_i | v_j \rangle = [w]_X^H A^T [u]_X$$

24) Pro hermitovskou matici A jsou následující ekvivalentní:

1) A je pozitivně definitní
2) A má všechna vlastní čísla kladná
3) Existuje reg. U t.ž. $A = U^H U$

$1 \Rightarrow 2$

Jelikož je Hermitovská, jsou všechny vlastní čísla reálná. Nechť je x vlastní vektor vlastního čísla λ.
Potom $0 < x^H A x = \lambda x^H x = \lambda \langle x|x \rangle$. Jelikož $\langle x|x \rangle > 0$, máme $\lambda > 0$.

$2 \Rightarrow 3$

Protože je A hermitovská, existuje reg. R a diag. D t.ž. $A = R^H D R$.
Vezmeme $\tilde{D}: \tilde{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$, $U = \tilde{D} R$. Pak $U^H U = R^H \tilde{D}^H \tilde{D} R = R^H D R = A$

$3 \Rightarrow 1$

Pohled $x \in \mathbb{C}^n \setminus 0$, pak $Ux \neq 0$, protože U je regulární. Máme $x^H A x = x^H U^H U x = \langle Ux | Ux \rangle > 0$

25) Bloková matice $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^H \\ \hline a & \hat{A} \end{array}\right)$ je pozitivně definitní, právě když $\alpha > 0$
a matice $\hat{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H$ je pozitivně definitní.

$\Leftarrow$ Pro $x \in \mathbb{C}^n \setminus 0$: $x^T = \left[x_1 \mid \tilde{x}^T \right]$, $x_1 \in \mathbb{C}$, $\tilde{x}^T \in \mathbb{C}^{n-1}$.

$$x^H A x = \left[\bar{x}_1 \mid \tilde{x}^H \right] \cdot \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^H \\ \hline a & \hat{A} \end{array}\right) \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline \tilde{x} \end{array}\right] = \alpha \bar{x}_1 x_1 + x_1 \tilde{x}^H a + \bar{x}_1 a^H \tilde{x} + \tilde{x}^H \hat{A} \tilde{x} - \frac{1}{\alpha} \tilde{x}^H a a^H \tilde{x} + \frac{1}{\alpha} \tilde{x}^H a a^H \tilde{x}$$

$$= \tilde{x}^H \left(\hat{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \right) \tilde{x} + \left(\sqrt{\alpha}\, \bar{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{x}^H a \right) \left(\sqrt{\alpha}\, x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a^H \tilde{x} \right)$$

Oba sčítance jsou nezáporné. $\hat{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H$ je pozitivně definitní. Druhý sčítanec je součin dvou komplexně sdružených čísel. Alespoň jeden je vyse kladný. Buď je $\tilde{x}$ netriviální, nebo pak x musí mít x_1 netriviální. Tedy $x^H A x > 0$.

$\Rightarrow$ Pro $\tilde{x} \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus 0$ vezmeme $x_1 = -\frac{1}{\alpha} a^H \tilde{x}$ a $x^T = \boxed{x_1 \mid \tilde{x}^T}$.

Dle našeho výběru: $\sqrt{\alpha}\, x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a^H \tilde{x} = 0$

Nyní $0 < x^H A x = \tilde{x}^H \left(\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H\right) \tilde{x} + 0 \cdot 0$, proto $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H$ je pozitivně definitní.

26) Hermitovská matice A řádu n je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ matice $A_1 - A_n$ mají kladné determinanty, kde A_i se sestává z prvních i řádků a sloupců A.

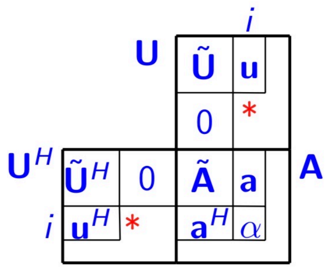
Pomocí Gaussovky: $A \sim\sim A'$. Protože jsme eliminovali řádky shora dolů (neměnili jsme jejich pořadí), máme horní trojúhelníkovou matici

máme: $\det(A_i) = \det(A'_i) = \prod_{j \le i} \alpha_j = \underline{\det(A_{i-1})\, \alpha_i}$ rekurence

A je pozitivně definitní $\Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_n > 0 \Leftrightarrow \det(A_1), \dots, \det(A_n) > 0$

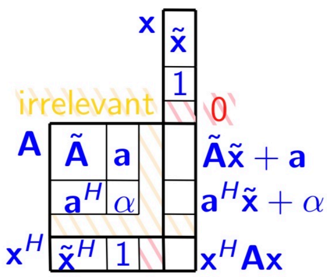
27) Pro každou pozitivně definitní matici A existuje jediná horní trojúhelníková matice U s kladnou diagonálou takovou, že $A = U^H U$. Takové matice se říká Choleského rozklad.

Předpokládejme, že algoritmus selže $*$ během i-té iterace, tj. $\alpha \le \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u}$.
Máme $\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{U}}^H \tilde{\boldsymbol{U}}$ a $\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{U}}^H \boldsymbol{u}$.



Nechť $\boldsymbol{x}^T = \boxed{\tilde{\boldsymbol{x}}^T \mid 1 \mid 0 \cdots 0}$ kde $\tilde{\boldsymbol{x}} = -\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1} \boldsymbol{u}$.

Nyní $\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} =$
$= \tilde{\boldsymbol{x}}^H \tilde{\boldsymbol{A}} \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^H \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^H \tilde{\boldsymbol{x}} + \alpha$
$= (-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1} \boldsymbol{u})^H (\tilde{\boldsymbol{U}}^H \tilde{\boldsymbol{U}})(-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1} \boldsymbol{u}) +$
$(-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1} \boldsymbol{u})^H (\tilde{\boldsymbol{U}}^H \boldsymbol{u}) + (\tilde{\boldsymbol{U}}^H \boldsymbol{u})^H (-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1} \boldsymbol{u}) + \alpha$
$= \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u} + \alpha = \alpha - \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u} \le 0$



Proto $\boldsymbol{A}$ není pozitivně definitní.

28) Pokud je g kv. forma na vekt. prost. V konečné dimenze n nad tělesem $\mathbb{K}$ char $\neq 2$, pak má forma g diagonální matici B vzhledem k vhodné bázi X.

Indukce podle n:

$$A = A_n = \begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline a & \hat{A} \end{array} \qquad \text{Pokud } \alpha \neq 0 \text{, vezmeme } P_n \begin{array}{c|c} 1 & o^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}a & I_{n-1} \end{array}$$

$$\text{Pak } P_n A_n P_n^T = \begin{array}{c|c} 1 & o^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}a & I_{n-1} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & o^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}a & I_n \end{array} = \begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline 0 & -\frac{1}{\alpha}aa^T + \tilde{A} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & o^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha}a & I_n \end{array} = \begin{array}{c|c} \alpha & o^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}$$

kde $A_{n-1} = \hat{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je symetrická.

Proto pro A_{n-1} existuje R_{n-1} t.ž. $R_{n-1}A_{n-1}R_{n-1}^T$ je diagonální.

$$\text{Zvolíme } R_n = \begin{array}{c|c} 1 & o^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array} \cdot P_n. \quad \text{Pak } R_n A_n R_n^T = \begin{array}{c|c} 1 & o^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array} P_n A_n P_n^T \cdot \begin{array}{c|c} 1 & o^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^T \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c|c} \alpha & o^T \\ \hline 0 & R_{n-1}A_{n-1}R_{n-1}^T \end{array} \text{ je diagonální.}$$

Pokud $\alpha = 0$, ale $a \neq 0$, pak $a_{i,1} \neq 0$. Použijeme elementární E pro přičtení i-tého řádku k prvnímu. Vezmeme $A' = EAE^T$. Protože $\alpha = 2a_{i,1} \neq 0$, můžeme postupovat jako výše.

Když $\alpha = 0$ and $a = 0$, pak $A_{n-1} = \hat{A}$, $R_n = \begin{array}{c|c} 1 & o^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}$

29) Každá kvadratická forma na konečně generovaném reálném vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s $1, -1, 0$. Všechny takové matice odpovídající téže formě mají stejný $\#1$, $\#-1$.

Existence

Nechť B je matice formy vzhledem k X. Reálnou sym. matici lze diagonalizovat, neboli $B = R^T D R$ pro reg. R.

$$\text{Rozložíme } D = S^T D' S \text{, kde } d_{ii} \begin{cases} = 0 : & d'_{ii} = 0,\ s_{ii} = 1 \\ > 0 : & d'_{ii} = 1,\ s_{ii} = \sqrt{d_{ii}} \\ < 0 : & d'_{ii} = -1,\ s_{ii} = \sqrt{-d_{ii}} \end{cases}$$

Nyní SR je reg. a $B = (SR)^T D' SR$. Zvolíme bázi Y tak, že souřadnice vektorů Y vzhledem k X jsou sloupce SR

tzn. $[id]_{YX} = SR$, $[id]_{XY} = (SR)^{-1}$

Nyní:

$$[id]_{XY}^T B [id]_{XY} = \left((SR)^{-1}\right)^T (SR)^T D' SR (SR)^{-1} = D$$ je hledaná diagonální matice.

Jednoznačnost

Nechť $X = (u_1 \dots u_n)$, $Y = (v_1 \dots v_n)$ jsou dvě báze t.ž. odpovídající matice B a B' formy g jsou diagonální s $1, -1$ a 0.

Protože součiny s reg. maticí $[id]_{XY}$ nemění hodnost, $\#0$ v $B = n - \text{rank}(B) = n - \text{rank}(B') = \#0$ v B'.

Nechť $r = \#1$ v B, $s = \#1$ v B'. Pokud $r > s$, uvažme $\text{span}(u_1 \dots u_r)$ a $\text{span}(v_{s+1} \dots v_n)$.

Součet jejich dimenzí přesahuje n, tedy mají netriviální průnik.

Zvolme $w \in \left(\text{span}(u_1 \dots u_r) \cap \text{span}(v_{s+1} \dots v_n)\right) \setminus 0$, tedy

$$[w]_X = (x_1 \dots x_r, 0, \dots 0)^T, \quad [w]_Y = (0, \dots, 0, y_{s+1}, \dots y_n)^T.$$

Nyní $g(w) = [w]_X^T B [w]_X = x_1^2 + \dots + x_r^2 > 0$

ale $g(w) = [w]_Y^T B [w]_Y = -y_{s+1}^2 - \dots - y_{\text{rank}(B')}^2 \leq 0$

spor! $r \not> s$, symetricky $s \not> r$

$r = s$