Gramova matice A prostoru V s bazí $X = (v_1 - v_n)$ je definována:

$$a_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle \quad : \quad \forall u,w \in V: \langle u|w\rangle = [w]_X^H A [u]_X$$

Pokud je X ortonormální báze, pak $A = I_n$

$[u]_X = (\alpha_1, \dots \alpha_n)^T$, $[w]_X = (\beta_1, \dots \beta_n)^T$, t.j. $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $w = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$.

$$\langle u|w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \middle| \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta_j} \langle v_i | v_j \rangle = [w]_X^H A^T [u]_X$$

Vlastnosti gramovy matice

2 $\langle v_i|v_j\rangle = \overline{\langle v_j|v_i\rangle}$ máme $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, t.j. matice je Hermitovská

2 $\langle u|u\rangle > 0$ pro $u \neq 0$ máme $[u]_X^H A^T [u]_X > 0$

Pozitivně definitní matice:

Pokud hermitovská matice A řádu n vyhovuje $\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus 0 : x^H A x > 0$, pak je pozitivně definitní.

Charakteristika pozitivně definitních matic:

Pro následující hermitovskou A jsou následující podmínky ekvivalentní:

1) A je pozitivně definitní

2) A má všechna vlastní čísla kladná

3) Existuje reg. U t.ž. $A = U^H U$.

$1 \Rightarrow 2$:

Jelikož je hermitovská, jsou všechny vlastní čísla reálná. Nechť x je netriviální vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ. Potom $0 < x^H A x = \lambda x^H x = \lambda \langle x|x\rangle$. Z $\langle x|x\rangle > 0$ máme $\lambda > 0$.

$2 \Rightarrow 3$:

Protože je A hermitovská, existuje R a diag. D t.ž. $A = R^H D R$.

Vezmeme diag. $\tilde{D}$: $\tilde{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$ a $U = \tilde{D}R$. Nyní $U^H U = (\tilde{D}R)^H \tilde{D} R = R^H \tilde{D}^H \tilde{D} R = R^H D R = A$

$3 \Rightarrow 1$:

Pokud $x \in \mathbb{C}^n \setminus 0$, pak $Ux \neq 0$, protože U je regulární.

Nyní $x^H A x = x^H U^H U x = (Ux)^H U x = \langle Ux|Ux\rangle > 0$

Choleského rozklad

Pro každou pozitivně definitní matici A existuje unikátní horní trojúhelníková matice U s kladnou diagonálou takovou, že $A = U^H U$. Matice U se nazývá Choleského rozklad.

Princip:

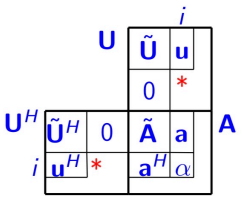
$U^H \Rightarrow u^H_{ij} = \overline{u_{ji}}$!!

$$
\begin{array}{c|c}
 & \boldsymbol{U} \\ \hline
\boldsymbol{U^H} & \boldsymbol{A}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 2 & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline
2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\
-1 & 3 & 1 & 3 & -2 & 2 & 7 & 20
\end{array}
$$

- jdu po řádku, symetricky doplním sloupec v U^H. Matice A musí být výsledkem daného součinu. Důležité je začít s nulami.

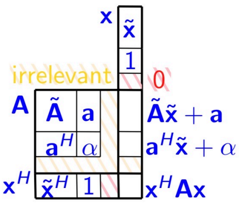
Důkaz správnosti:

Předpokládejme, že algoritmus selže $*$ během i-té iterace, tj. $\alpha \le \boldsymbol{u}^H\boldsymbol{u}$.
Máme $\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{U}}^H\tilde{\boldsymbol{U}}$ a $\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{U}}^H\boldsymbol{u}$.



Nechť $\boldsymbol{x}^T = \boxed{\tilde{\mathbf{x}}^T \mid 1 \mid 0\cdots0}$ kde $\tilde{\mathbf{x}} = -\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u}$.

Nyní $\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} =$
$= \tilde{\mathbf{x}}^H\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^H\mathbf{a} + \mathbf{a}^H\tilde{\mathbf{x}} + \alpha$
$= (-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u})^H(\tilde{\boldsymbol{U}}^H\tilde{\boldsymbol{U}})(-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u}) +$
$(-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u})^H(\tilde{\boldsymbol{U}}^H\boldsymbol{u}) + (\tilde{\boldsymbol{U}}^H\boldsymbol{u})^H(-\tilde{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{u}) + \alpha$
$= \boldsymbol{u}^H\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^H\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^H\boldsymbol{u} + \alpha = \alpha - \boldsymbol{u}^H\boldsymbol{u} \le 0$



Proto $\boldsymbol{A}$ není pozitivně definitní.

Rekurentní podmínka:

Bloková matice $A = \begin{array}{c|c} \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \end{array}$ je pozitivně definitní, právě když $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a^H a$ je poz. def.

Gaussova eliminace prvního sloupce pomocí prvního řádku dá:

$$
\begin{array}{c|c} \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \end{array} \sim \sim \begin{array}{c|c} \alpha & a^H \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}
$$

Pomocí Gaus. eliminace zleva dolů lze upravit na horní trojúhelníkovou matici. Pokud jsou všechny prvky na diagonále kladné, je matice pozitivně definitní.

Důkaz:

Důkaz: $\Leftarrow$ Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{0}$ znač. $\boldsymbol{x}^T = \boxed{x_1 \mid \tilde{\mathbf{x}}^T}$, $x_1 \in \mathbb{C}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{n-1}$.

$$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \tilde{\mathbf{x}}^H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \boldsymbol{a}^H \\ \boldsymbol{a} & \tilde{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \alpha x_1\overline{x_1} + x_1\tilde{\mathbf{x}}^H\boldsymbol{a} + \overline{x_1}\boldsymbol{a}^H\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^H\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\mathbf{x}}$$
$$- \tfrac{1}{\alpha}\tilde{\mathbf{x}}^H\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H\tilde{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{\alpha}\tilde{\mathbf{x}}^H\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H\tilde{\mathbf{x}}$$
$$= \tilde{\mathbf{x}}^H(\tilde{\boldsymbol{A}} - \tfrac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H)\tilde{\mathbf{x}} + (\sqrt{\alpha}\overline{x_1} + \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\tilde{\mathbf{x}}^H\boldsymbol{a})(\sqrt{\alpha}x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\boldsymbol{a}^H\tilde{\mathbf{x}})$$

Oba sčítance jsou nezáporné: $\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H$ je pozitivně definitní; následuje standardní skalární součin vektoru samého se sebou. Alespoň jeden je ryze kladný, jinak $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Tedy $\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$.

$\Rightarrow$ Pro $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathbf{0}$ vezmeme $x_1 = -\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}^H\tilde{\mathbf{x}}$ a $\boldsymbol{x}^T = \boxed{x_1 \mid \tilde{\mathbf{x}}^T}$.
Dle našeho výběru: $\sqrt{\alpha}x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\boldsymbol{a}^H\tilde{\mathbf{x}} = 0$.
Nyní $0 < \boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \tilde{\mathbf{x}}^H(\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H)\tilde{\mathbf{x}} + 0 \cdot 0$
Proto $\tilde{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H$ je pozitivně definitní.

Též
$\boldsymbol{e}^{1H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^1 = \alpha > 0$.

Sylvesterova podmínka:

Hermitovská matice A řádu n je pozitivně definitní, právě tehdy když matice $A_1 \ldots A_n$ mají kladné determinanty, kde A_i se skládá z prvních i řádků a sloupců A.

Použijeme Gaussovku. $A \sim\sim A'$, nechť $\alpha_i \ldots \alpha_n$ jsou prvky diagonály A'.

Protože se eliminovalo shora dolů, tak platí: $\det(A_i) = \det(A'_i) = \prod_{j \leq i} \alpha_i = \det(A_{i-1})\,\alpha_i$

A je pozitivně definitní $\iff \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0 \iff \det(A_1), \ldots, \det(A_n) > 0$