Nechť W je prostor se sk. součinem, V jeho podprostor s ortonormální bází $Z = (v_1, \dots, v_n)$.

Zobrazení $p_Z : W \to V$ definované: $p_Z(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u | v_i \rangle v_i$ je ortogonální projekce W na V.

Ortogonální projekce je lineární zobrazení.

$$p_Z(au) = \sum_{i=1}^{n} \langle au | v_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^{n} a \langle u | v_i \rangle v_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} \langle u | v_i \rangle v_i = a\, p_Z(u)$$

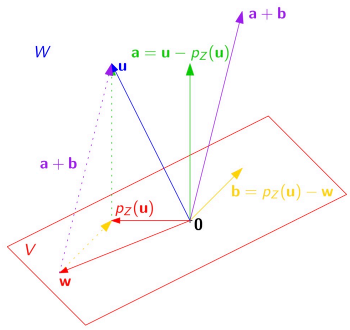
$$p_Z(u+w) = \sum_{i=1}^{n} \langle u+v | v_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\langle u | v_i \rangle + \langle v | v_i \rangle \right) v_i = \sum_{i=1}^{n} \langle u | v_i \rangle v_i + \sum_{i=1}^{n} \langle w | v_i \rangle v_i = p_Z(u) + p_Z(w)$$

Nechť p_Z je ortogonální projekce W na V. Potom $u - p_Z(u) \perp v_i : \forall v_i \in Z$

Zase je všechno nula kromě jednoho případu

$$\langle u - p_Z(u) | v_i \rangle = \langle u | v_i \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle u | v_j \rangle v_j \middle| v_i \right\rangle = \langle u | v_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle u | v_j \rangle \langle v_j | v_i \rangle = \langle u | v_i \rangle - \langle u | v_i \rangle = 0$$

Vektor $p_Z(u)$ je vektor z $V = \mathrm{Span}(Z)$, který je nejbližší k u v tom smyslu, že minimalizuje $\| u - p_Z(u) \|$.



Pro $w \in V$, $w \neq p_Z(u)$ vezměme $a = u - p_Z(u)$, $b = p_Z(u) - w \neq 0$.

Protože $b \in V$, máme $\langle a | b \rangle = 0$.

Nyní: $\| u - w \| = \| a + b \| = \sqrt{\langle a+b | a+b \rangle} = \sqrt{\langle a|a \rangle + \langle b|a \rangle + \langle a|b \rangle + \langle b|b \rangle} =$

$$= \sqrt{\langle a|a \rangle + \langle b|b \rangle} > \sqrt{\langle a|a \rangle} = \| a \| = \| u - p_Z(u) \|. \quad \boxed{\times}$$

Důsledek: Zobrazení p_Z nezávisí na volbě báze Z.

Metoda nejmenších čtverců

Pokud soustava $Ax = b$ nemá řešení, tj. když $b \in \mathcal{S}(A)$, pak můžeme b promítnout do $\mathcal{S}(A)$ a najít nejbližší řešení (získat b').

$$\| b - b' \| = \| b - Ax \|$$

Gram-Schmidtova ortonormalizace

- převod libovolné báze na ortonormální.

$(u_1 \ldots u_n) \nearrow \quad (v_1 \ldots v_n) \nearrow$

For $i = 1 \ldots n$:

1. $w_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle u_i | v_j \rangle v_j$ — odečtení projekcí ostatních vektorů

2. $v_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i$ — normalizace

end

Správnost alg.:

Díky 1. a lemmatu o kolmosti $u - p_z(u)$ na vektory ortogonální báze:

$w_i \perp v_j \ \forall j : j < i \implies v_i \perp v_j : i \neq j$

2: $\|v_i\| = \left\| \frac{1}{\|w_i\|} \cdot w_i \right\| = \left\| \frac{w_i}{w_i} \right\| = 1$

Díky lemmatu o výměně:

$$\mathrm{span}(v_1 \ldots v_{n-1}, u_n) = \mathrm{span}(v_1 \ldots v_{n-1}, w_n) = \mathrm{span}(v_1 \ldots v_{n-1}, v_n)$$

Důsledek:

Nechť je V podprostorem W se sk. souč. Každou ortonormální bázi podprostoru V lze rozšířit na ortogonální bázi prostoru W.

Isometrie:

Zobrazení je isometrie mezi V a W, pokud zachovává sk. součin: $\langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle$

Lineární zobrazení mezi U a V je ISOMETRIÍ, právě když zachovává normu:

$\|u\| = \|f(u)\|$.

Důkaz: $\implies$ (je isometrií, zachová normu)

$\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \sqrt{\langle f(u) | f(u) \rangle} = \|f(u)\|$

$\impliedby$ Porovnejme následující:

$$\|u + aw\|^2 = \|u\|^2 + a\langle w | u \rangle + \bar{a}\langle u | w \rangle + a\bar{a}\|w\|^2$$

$$\|f(u+aw)\|^2 = \|f(u)\|^2 + a\langle f(w) | f(u) \rangle + \bar{a}\langle f(u) | f(w) \rangle + a\bar{a}\|f(w)\|^2$$

$a = 1$: $\langle w | u \rangle + \langle u | w \rangle = \langle f(w) | f(u) \rangle + \langle f(u) | f(w) \rangle$

$a = i$: $\langle w | u \rangle - \langle u | w \rangle = \langle f(w) | f(u) \rangle - \langle f(u) | f(w) \rangle$ $\implies \langle u | w \rangle = \langle f(u) | f(w) \rangle$

$i \in \mathbb{C}$

Maticová reprezentace bijektivních izometrií

Nechť V a W jsou prostory se sk. součinem konečné dim. a X, Y jejich ortonormální báze.

Lin. zobr. $f: V \to W$ je bijektivní izometrie $\iff$ $[f]_{XY}$ je unitární.

Protože X, Y jsou ortonormální ($\langle x_i | x_j \rangle = 0$ if $i \neq j$):

To stejné vůči Y

$\langle u | w \rangle = [w]_X^H [u]_X$ $\to$ $\left([f]_{XY} \cdot [w]_X\right)^H = [w]_X^H \cdot [f]_{XY}^H$

$\langle f(u) | f(w) \rangle = [f(w)]_Y^H [f(u)]_Y = [w]_X^H \cdot [f]_{XY}^H \cdot [f]_{XY} \cdot [u]_X$

Obecně $x^T y = x^T A y$ pouze pokud $A = I_n$. Tedy:

$[w]_X^H [u]_X = [w]_X^H [f]_{XY}^H \cdot [f]_{XY} \cdot [u]_X$ platí $\forall u,w \iff [f]_{XY}^H \cdot [f]_{XY} = I_n$,

tedy že $[f]_{XY}$ je unitární.

Ortogonální doplněk:

Ortogonální doplněk podmnožiny V prostoru se sk. souč. W je $V^\perp = \{u \in W : \forall v \in V : u \perp v\}$

Pokud $U \subseteq V \Rightarrow U^\perp \supseteq V^\perp$

$V^\perp = \{u \in W : \forall v \in V : u \perp v\} \subseteq \{u \in W : \forall v \in U : u \perp v\} = U^\perp$

Každý ortogonální doplněk je podprostorem W

$u \perp v \Rightarrow \langle au | v \rangle = a \langle u | v \rangle = 0 \Rightarrow (au) \perp v$

$u, w \perp v \Rightarrow \langle u + w | v \rangle = \langle u | v \rangle + \langle w | v \rangle = 0 + 0 \Rightarrow (u + w) \perp v$

Pro jakékoliv $V \subseteq W$: $V \cap V^\perp = \{0\}$

Jestliže $u \in V \cap V^\perp \Rightarrow \langle u | u \rangle = 0$, tedy $u = 0$

Prostor určený maticí:

$$\mathrm{Ker}(A) = (R(A))^\perp$$

Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ libovolné $u \in R(A)$ a $v \in \mathrm{Ker}(A)$: $u \perp v$ vzhledem ke st. sk. součinu.

Nechť $x_1 \dots x_r$ je báze $R(A)$, $y_1 \dots y_{n-r}$ je báze $\mathrm{Ker}(A)$, kde $r = \mathrm{rank}(A)$.

furt nula

Potom $u = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i$ a $v = \sum_{j=1}^{n-r} b_j y_j$: $\langle u | v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \middle| \sum_{j=1}^{n-r} b_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-r} a_i b_j \langle x_i | y_j \rangle = 0$

Pro konečně generovaný prostor W se skalárním součinem a podprostor V platí:

$$(V^\perp)^\perp = V \quad \text{a} \quad \dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(W)$$

Zvolíme si nějakou ortonormální bázi X prostoru V a doplníme ji na ortonormální bázi Z prostoru W.

$Y = Z \setminus X$, $X = (x_1 — x_k)$, $Y = (y_1 — y_l)$. Y je ten doplněk

$\forall u \in \text{span}(X) = V \perp \forall v \in \text{span}(Y)$:

$$\langle u|v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} b_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \langle x_i|y_j\rangle = 0$$

protože Z je ortonormální báze. Tudíž $\text{span}(Y) \subseteq V^\perp$ 1. část

Vezmeme $w \in V^\perp$ a určíme $[w]_Z$. Protože Z je ortonormální, koeficienty w vzhledem k Z jsou Fourierovy koeficienty.

Protože $w \in V^\perp$, máme $\langle w|x_i\rangle = 0$ pro $\forall x_i \in X$, tedy $w \in \text{span}(Y)$ t.j.

2. část $\text{span}(Y) \supseteq V^\perp$

tedy: $\text{span}(Y) = V^\perp$

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = |X| + |Y| = |Z| = \dim(W)$$

$$(V^\perp)^\perp = \text{span}(Z \setminus Y) = \text{span}(X) = V \quad \boxtimes$$