Skalární součin na vekt. prostoru V nad $\mathbb{C}$ je zobrazení, které přiřadí každé dvojici vektorů $u,v \in V$ skalár $\langle u|v\rangle \in \mathbb{C}$ takový, že:

- $\forall u \in V: \langle u|u\rangle \in \mathbb{R}_0^+$
- $\forall u \in V: \langle u|u\rangle = u \iff u = 0$
- $\forall u,v \in V: \langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$
- $\forall u,v,w \in V: \langle u+v|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$
- $\forall u \in V, \forall a \in \mathbb{C}: \langle au|v\rangle = a . \langle u|v\rangle$

Tedy $\langle \bullet|\bullet\rangle$ je $f: V \times V \to \mathbb{C}$

Vytýkání z druhé složky:

$$\langle u|aw\rangle = \overline{\langle aw|u\rangle} = \bar{a}\overline{\langle w|u\rangle} = \bar{a}\langle u|w\rangle$$

Standardní skalární součin: (nad $\mathbb{C}^n$)

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $\overline{\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} =$ „jedno číslo"

$$\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i = v^H u$$

(Všimneme si, že nad $\mathbb{R}$ $\bar{v}_i = v_i$ a $v^H = v^T$)

Určený maticí:

$$\langle u|v\rangle = v^T A^T A u$$

Norma odvozená od skalárního součinu (je-li sk. součin v prostoru) je zobrazení:

$\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$ definované $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$

$\langle u|v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha$, kde α je úhel mezi dvěma vektory.

Cauchy-Schwarzova nerovnost:

$\forall u,v \in \mathbb{C}^n: |\langle u|v\rangle| \leq \sqrt{\langle u|u\rangle \langle v|v\rangle}$, t.ž. $|\langle u|v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Pro $u,v = 0$ dostaneme $0 \leq 0$

$\forall a \in \mathbb{C}: \|u+av\|^2 \geq 0$ → druhá mocnina je vždy nezáporná

$$\|u+av\|^2 = \langle u+av|u+av\rangle = \langle u|u+av\rangle + a\langle v|u+av\rangle = \langle u|u\rangle + \bar{a}\langle u|v\rangle + a\langle v|u\rangle + a.\bar{a}\langle v|v\rangle$$

Nechť $a = -\frac{\langle u|v\rangle}{\langle v,v\rangle}$

Pak

$$0 \leq \langle u|u\rangle - \frac{\langle u|v\rangle}{\langle v|v\rangle} \cdot \langle v|u\rangle$$

$$\langle u|v\rangle \cdot \langle v|u\rangle \leq \langle u|u\rangle \cdot \langle v|v\rangle$$

$$|\langle u|v\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

→ $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Trojúhelníková nerovnost pomocí Cauchy-Schwarze:

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

$\langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle \le 2\cdot|\langle u|v\rangle|$

$$\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v|u+v\rangle} = \sqrt{\langle u|u\rangle + \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle + \langle v|v\rangle} \le \sqrt{\langle u|u\rangle + 2|\langle u|v\rangle| + \langle v|v\rangle} =$$

$$\sqrt{\|u\|^2 + 2|\langle u|v\rangle| + \|v^2\|} \underset{\text{Cau.Sch.}}{\le} \sqrt{\|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v^2\|} = \|u\| + \|v\| \qquad \boxed{X}$$

Vektory u, v jsou kolmé, pokud $\langle u|v\rangle = 0$, značíme $u \perp v$

Množina netriviálních vzájemně kolmých vektorů je LNZ.

Nechť $u_0 - u_k$ jsou kolmé, ale $u_0 = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \neq 0$, pak: — Pak by to triviálně platilo.

— jsou na sebe kolmé, takže $\langle u_i|u_0\rangle = 0$

$$0 \neq \langle u_0|u_0\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \middle| u_0 \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle u_i|u_0\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot 0 = 0$$

Báze $Z = \{v_1 - v_n\}$ prostoru V se skalárním součinem je ortonormální, pokud $v_i \perp v_j \ \forall i,j : i \neq j$
a $\forall v_i \in Z : \|v_i\| = 1$

Nechť $Z = \{v_1 - v_n\}$ je ortonormální báze prostoru V. Pro každé $u \in V$:

$$u = \langle u|v_1\rangle v_1 + \dots + \langle u|v_n\rangle v_n.$$

Koeficienty $\langle u|v_i\rangle$ se nazývají Fourierovy koeficienty.

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \implies \langle u|v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \middle| v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i|v_j\rangle = a_j$$

Protože jsou kolmé, jsou všude nuly nule,
pouze skalární součin $\langle v_j|v_j\rangle = 1$

Nechť Z je ortonormální báze prostoru V se skalárním součinem. Pro každé $u, w \in V$: $\langle u|w\rangle = [w]_Z^H [u]_Z$

Víme, že: $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i\rangle v_i$ a $w = \sum_{j=1}^{n} \langle w|v_j\rangle v_j$, pak:

$$\langle u|w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i\rangle v_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \langle w|v_j\rangle v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle u|v_i\rangle \overline{\langle w|v_j\rangle} \langle v_i|v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u|v_i\rangle \overline{\langle w|v_i\rangle}$$

Souřadnice w vůči Z

$$= [w]_Z^H [u]_Z$$

Určete ortonormální bázi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = u_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_1 | x_i \rangle u_i$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \cdot u_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$$

$$w_2 = (4,1,4,1) - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)^T$$

$$v_2 = \frac{1}{\underbrace{\|w_2\|}_{3 =}} \cdot w_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$$

$$w_3 = (1,2,3,4)^T - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T = (-1, -1, 1, 1)$$

$$v_3 = \frac{1}{\underbrace{\|w_3\|}_{2 =}} w_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$$

Rozšiřte nyní na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

např.: $(0, 0, 0, 1)^T$