Hermitovská transpozice matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je matice $A^H \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $(A^H)_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$

Matice A je Hermitovská pokud $A = A^H$.

Matice A je Unitární, pokud $A^{-1} = A^H$

$(A^H)^H = A$, $(AB)^H = B^H A^H$

Matice A je Ortogonální, pokud $A^{-1} = A^T$

Jestliže je A unitární, pak A^H je taky unitární.

$(A^H)^H = A = (A^{-1})^{-1} = (A^H)^{-1}$

Hermitovská matice má reálnou úhlopříčku.

$a_{i,i} = \overline{a_{i,i}} \Rightarrow a_{i,i} \in \mathbb{R}$

Součin dvou unitárních matic je opět unitární.

$A^H = A^{-1}$, $B^H = B^{-1}$, pak $(AB)^H = B^H A^H = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$

Unitární A splňuje: $A^H A = I_n$

Každý $x \in \mathbb{C}^n$ takový, že $x^H x = 1$ lze doplnit na unitární matici.

Každá hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná. Navíc existuje unitární R taková, že $R^{-1} A R$ je diagonální.

Indukcí podle n:

$n = 1$ triviálně platí.

V tělese $\mathbb{C}$ má matice A_n eigenvalue s eigenvectorem.

Zvětšíme x faktorem $\frac{1}{\sqrt{x^H x}}$, aby $x^H x = 1$

To doplníme na unitární matici P_n.

$P_n^H A_n P_n$ je hermitovská $(P_n^H A_n P_n)^H = P_n^H A_n P_n$

Jelikož $A_n x = \lambda x$, matice $A_n P_n$ má λx jako první sloupec. Protože P_n je unitární:

první sloupec $P_n^H A_n P_n$ je $P_n^H A_n x = P_n^H (A_n x) = P_n^H (\lambda x) = \lambda P_n^H x = (\lambda, 0, \dots, 0)^T$

díky tomu, že je hermitovská, dostanu 0 všude kromě první pozice

Proto $P_n^H A_n P_n = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right]$, kde A_{n-1} je hermitovská. A hermitovská má na diagonále $\mathbb{R}$, takže $\lambda \in \mathbb{R}$.

Podle IP $R_{n-1}^{-1} A_{n-1} R_{n-1} = D_{n-1}$ pro nějaké unitární R_{n-1} a diagonální D_{n-1}.

$R_n = P_n \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}\right]$, součiny unitárních matic jsou unitární. Nyní:

$$R_n^{-1} A_n R_n = R_n^H A_n R_n = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^H \end{array}\right] \cdot P_n^H A_n P_n \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^H \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0^T \\ \hline 0 & D_{n-1} \end{array}\right] = D$$

Každá reálná symetrická matice A má všechny vlastní čísla reálná a existuje ortogonální Q takové, že $Q^{-1}AQ$ je diagonální.

Důkaz stejný jako výše -> jen x si můžu zvolit jako reálné, protože soustava $(A - \lambda I)x = 0$ má všechny koeficienty reálné.