Matice A, B si jsou podobné, pokud existuje regulární R taková, že $A=R^{-1}BR$.

Pokud A je podobná B, t.j. $B=RAR^{-1}$ a vlastní číslo λ přísluší vlastním vektorem x v A, pak λ je také vlastní číslo B příslušného vektorem Rx.

Pro $y=Rx$ platí: $By = RAR^{-1}Rx = RAx = \lambda Rx = \lambda y$

Pokud $B=RAR^{-1}$, pak $p_B(t)=p_A(t)$

$$p_B(t) = \det(B-tI_n) = \det\left(RAR^{-1} - R\cdot(tI)R^{-1}\right) = \det\left(R(A-tI)R^{-1}\right) = \det(R)\cdot\det(A-tI)\cdot\det(R^{-1})$$
$$= p_A(t)$$

Násobnosti:

Pokud báze X obsahuje eigenvector u zobr. f, pak souřadnice odpovídající u je násobkem λ při f.

- ${}_X[f]_X$ obsahuje ve sloupci odpovídajícímu u pouze λ na diagonále, jinde nuly

Je-li eigenvector u zároveň i-tým vectorem báze X, pak i-tý sloupec matice ${}_X[f]_X =$
$[f(u)]_X = [\lambda u]_X = \lambda[u]_X = \lambda e_i$

Geometrická násobnost eigenvalue λ matice A $\leq$ algebraické násobnosti.

Nechť $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ je lin. zobr. $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ vzhledem ke kan. bázi, tzn. $A={}_K[f]_K$

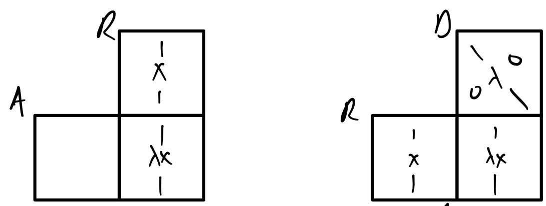
Nechť $u_1,\dots,u_k$ je báze prostoru vlastních vektorů příslušných λ, čili k je geometrická nás. λ.

Doplníme $u_1\dots u_k$ na bázi prostoru $\mathbb{K}^n$. Potom ${}_X[f]_X = {}_K[id]_X^{-1}\,{}_K[f]_K\,{}_K[id]_X$ je podobná A a přitom má v prvních k sloupcích na diagonále λ a jinde nuly.

Odtud $(\lambda-t)^k$ dělí $p_{{}_X[f]_X}(t)$. Protože A a ${}_X[f]_X$ mají stejné char. polynomy, má λ algebraickou násobnost alespoň k.

Matice $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ je podobná diagonální matici $\iff$ prostor $\mathbb{K}^n$ má bázi z eigenvectorů A.

$AR=RD$ s diag. mat. D, pokud $\forall i: \exists$ vektor x t.ž. $Ax=\lambda x = d_{ii}x$



Taková matice je diagonalizovatelná.

$A=RDR^{-1} \iff AR=RD \iff R^{-1}AR=D$

– Má-li čtvercová matice řádu n „n" různých vlastních čísel, je diagonalizovatelná.

– Když $p_A(t) = \prod_i (t-\lambda_i)^{r_i}$, pak:

$$A \text{ je diagonalizovatelná} \iff \dim\big(\ker(A-\lambda I)\big) = r_i$$

– Je-li $A = R^{-1}DR$, pak platí:

$$A^k = (R^{-1}DR) = R^{-1}D^kR.$$

Jordanova normální forma:

Jordanův blok je matice ve tvaru:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Každá čtvercová komplexní matice A je podobná matici J v takzvané Jordanově normální formě:

Jordanův blok je určen jednoznačně, pouze se může měnit jejich permutace v bloku.
(Diagonalizovatelná matice má bloky 1×1)

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Zobecněné vlastní vektory:

Nechť $AR = RJ_\lambda$. Označíme-li i-tý sloupec R jako x_i, pak splňuje $(A-\lambda I)^i x_i = 0$

$$\begin{array}{c|c} RJ_\lambda & \begin{matrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{matrix} \\ \hline x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n & \lambda x_1 \;\; x_1+\lambda x_2 \;\; \dots \;\; x_{n-1}+\lambda x_n \end{array}$$

$$Ax_1 = \lambda x_1 \implies (A-\lambda I)x_1 = 0$$

$$Ax_2 = x_1 + \lambda x_2 \implies (A-\lambda I)x_2 = x_1 \implies (A-\lambda I)^2 x_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$Ax_n = x_{n-1} \; \lambda x_n \implies (A-\lambda I)x_n = x_{n-1} \implies (A-\lambda I)^n x_n = 0$$

Zobecněný vlastní vektor matice A k vlastnímu číslu λ je libovolný vektor x splňující

$\boxed{(A-\lambda I)^k x = 0}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$

Lze je řadit do řetízků $\dots, x_2, x_1, 0$, kde $(A-\lambda I)x_i = x_{i-1}$.
Totiž pro lin. zobr. f odpovídá výrazu $f(x_i) - \lambda x_i = x_{i-1}$

$\Big\}$ tedy $x \in \ker\big((A-\lambda I)^k\big)$

Pro každý prostor V konečné dimenze nad $\mathbb{C}$ a lineární $f: V \to V$ lze najít bázi z řetězců zobecněných vlastních vektorů zobrazení f.

- To platí i nad $\mathbb{K}$, pokud vlastní čísla mají v součtu alg. násobnost $\dim(V)$.

Jelikož $Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 = (A - \lambda I)\cdot x$ → To se rovná, pokud $|\det| = 0$

Příklady: Rozložte na součin RJR^{-1}:

$$\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} \qquad p_A(t) = \begin{pmatrix} -11-t & 30 \\ -10 & 24-t \end{pmatrix} = (-11-t)\cdot(24-t) + 300 = -264 - 24t + 11t + t^2 + 300$$

$$= t^2 - 13t + 36$$

$$(t-9)\cdot(t-4)$$

$\lambda_1 = 9$

$\lambda_2 = 4$

$$J = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$A = RJR^{-1}$

$AR = RJ$

$$\begin{pmatrix} -20 & 30 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = t, \; -2x_1 = -3t, \; x_1 = \tfrac{3}{2}t \qquad X_1 = c\cdot(3,2)^T$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 30 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = t, \; x_1 = 2t \qquad X_2 = c\cdot(2,1)^T$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad p_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 2 & -2 \\ 1 & -1-t & 5 \\ 2 & -4 & 8-t \end{vmatrix} = (-t)\cdot(-1-t)\cdot(8-t) + 20 + 8 - 4 - 4t - 20t - 16 + 2t$$

$-8-8t+t+t^2 \qquad 24-16 \qquad -24t+2t$

$$= -t^3 + 7t^2 + 8t + 8 - 22t = -t^3 + 7t^2 - 14t + 8$$

$$-t^3 + 6t^2 - 8t + t^2 - 6t + 8$$

$$-t\cdot(t^2 - 6t + 8) + (t^2 - 6t + 8)$$

$$(1-t)\cdot(t^2 - 6t + 8)$$

$$(1-t)\cdot(t-2)\cdot(t-4)$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = 0, \; x_2 = t, \; x_1 = 2t$$

$$X_1 = c\cdot(2,1,0)^T$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = t, \; x_2 = 2t, \; x_1 = t$$

$1 \quad -2$

$$X_2 = c\cdot(1,2,1)^T$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$