Pro vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{K}$ a lineární zobrazení $f: V \to V$, vlastní číslo zobrazení f je jakékoli $\lambda \in \mathbb{K}$, pro které existuje vektor $u \in V \setminus O$ takový, že $f(u) = \lambda u$

Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ je libovolný vektor $u \in V$ takový, že $f(u) = \lambda u$

Jestliže V má konečnou dimenzi n, pak f může být reprezentováno maticí $A = [f]_{XX} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ vzhledem k nějaké bázi X prostoru V.

Vlastní čísl. / vektor matice tedy fungují obdobně a musí platit: $Ax = \lambda x$

Množina všech vlastních čísel matice je jejím spektrem.

Vlastní čísla diagonální matice:

$$Dx = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & d_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} x_1 \\ d_{2,2} x_2 \\ \vdots \\ d_{n,n} x_n \end{pmatrix} = \lambda x$$

tedy

$$\lambda = d_{1,1} \quad a \quad x = e^1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$$
$$\lambda = d_{2,2} \quad a \quad x = e^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T$$
$$\vdots$$
$$\lambda = d_{n,n} \quad a \quad x = e^n = (0, \ldots, 1)^T$$

→ Vlastní čísla jsou tak prvky na diagonále a vlastní vektory tvoří kanonickou bázi

Vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu číslu tvoří podprostor:

Uvažme vlastní číslo λ lin. zobr. $f: V \to V$ a množinu $U = \{u \in V : f(u) = \lambda u\}$

- pro $\forall u, v \in U$ a $a \in \mathbb{K}$ dostaneme:

$$f(au) = a f(u) = a \lambda u = \lambda (au)$$
$$f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda (u+v)$$

Je tak uzavřen na násobení a sčítání, tedy U je podprostorem V.

Geometrická násobnost vlastního čísla je dimenze prostoru jeho vlastních vektorů

Nechť $f: V \to V$ je lin. zobr. a $\lambda_1 \dots \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla f a $u_1 \dots u_k$ odpovídající netriviální vlastní vektory.

Potom $u_1, \dots, u_k$ jsou LNZ.

Sporem: Nechť k je nejmenší číslo, pro které platí: $\lambda_1 \dots \lambda_k$ a $u_1 \dots u_k$ t.ž. — tedy že jsou LZ.

$$a_1 \dots a_k \in \mathbb{K} \setminus 0 : \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0$$

0 vyjádříme dvěma způsoby:

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i u_i$$

$$0 = \lambda_k 0 = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i u_i$$

Pak $0 = 0 - 0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i u_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i u_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) a_i u_i$.

Protože $\lambda_i \neq \lambda_k$, dostaneme $(\lambda_i - \lambda_k) a_i \neq 0$, tedy již $u_1 \dots u_{k-1}$ jsou LZ, což je spor s minimalitou

Důsledek: Matice řádu n má nejvýše n vlastních čísel.

Charakteristický polynom matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je $p_A(t) = \det(A - tI_n)$

Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, právě když je λ kořenem jeho char. polynomu $p_A(t)$.

λ je vlastní číslo $A \iff$

$\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : Ax = \lambda x$ $\qquad (A - tI_n)$

$\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : 0 = Ax - \lambda x = Ax - \lambda I_n x = (A - \lambda I_n)x$

$\iff$ matice $(A - \lambda I_n)$ je singulární

$\iff 0 = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)$ } tedy λ je kořenem!

$p_A(t)$

Příklad:

Diagonální/trojúhelníková matice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad p_A(t) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-t & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2}-t & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & & a_{n,n}-t \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - t)$$

Vlastní čísla jsou $a_{1,1}; a_{2,2}; \dots$

Matice plná jedničkami:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ & & \vdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad p_A(t)=\begin{vmatrix}1-t & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-t & 1 & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & \cdots & 1-t\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-t & 0 & 0 & t\\ 0 & -t & \cdots & \vdots\\ \vdots & \cdots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots 0 & -t & t\\ 1 & \cdots & \cdots & 1-t\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-t & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -t & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots 1 & n-t\end{vmatrix} = (-t)^{n-1}\cdot(n-t)$$

→ $-t$ na skoro celé diagonále

→ přičtení všech sloupců k pravému

$$2t^2-2-t^3+t$$
$$(t^2-1)\cdot(2-t)$$
$$-1+t-t+t^2$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} \qquad p_A(t)=\begin{vmatrix}1-t & 2 & 0\\ 3 & -1-t & 3\\ 1 & -2 & 2-t\end{vmatrix} = (1-t)\cdot(-1-t)\cdot(2-t)+6-0+6(1-t)-6(2-t)=$$

$$-t^3+2t^2+t-2\ +6+6-6t-12-6t = -t^3+2t^2+t-2$$

$$-t^2\cdot(t-2)+(t-2)=$$
$$(t-2)\cdot(1-t^2)$$
$$(t-2)\cdot(1-t)\cdot(1+t)$$

Vlastní vektor x_1 pro λ_1 je lib. řešení

$$(A-\lambda_1 I_n)x_1=0$$

$\lambda_1=2$

$\lambda_2=1$

$\lambda_3=-1$

$$(A-\lambda_1 I_n)=\begin{pmatrix}1-2 & 2 & 0\\ 3 & -1-2 & 3\\ 1 & -2 & 2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -3 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$x_3=t$
$x_2=-t$
$x_1=2t$

$x_1=\text{span}\{(2,-1,1)^T\}$

Obdobně pro ostatní vektory.

Koeficienty char. polynomu:

→ jde tu o výsledný polynom, např.: $-t^3+2t^2+t-2$

Pro $p_A(t)=\det(A-tI_n)=\sum_{i=1}^{n} b_i t^i$ platí:

- $b_n=(-1)^n$ … pouze součin na diagonále může dát t^n, každý takový faktor t má koeficient -1.

- $b_0=\det(A)$ … dosadíme $t=0$ do $p_A(t)$ $\quad \det(A-0I_n)=\det(A)$

- $b_{n-1}=(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ … člen t^{n-1} lze získat pouze ze součinu n lineárních členů z tho dvojčlenu

  $(a_{1,1}-t)\cdot(a_{2,2}-t)\cdot\ldots\cdot(a_{n,n}-t)$ na diagonále $A-tI_n$ tak, že vybereme $n-1$ krát výraz $-t$ a jedenkrát $a_{i,i}$. Výběr lze provést n způsoby, kde sčítance $a_{i,i}$ v koeficientu

  $b_{n-1}=(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ odpovídají různým výběrům $(-t)^{n-1}$.

- Je-li $\mathbb{K}$ algebraicky uzavřené, lze charakteristický polynom rozložit na lineární faktory s kořeny/vlastními čísly:

  $p_A(t)=(\lambda_1-t)^{r_1}\cdot(\lambda_2-t)^{r_2}\ldots(\lambda_k-t)^{r_k}$, kde $r_1+r_2+\ldots+r_k=n$

Exponent r_i je algebraická násobnost vlastního čísla λ_i.

Spočítejte vlastní čísla nad $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 2 & 3-t & 3 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+4t & 0 & 0 \\ 2 & 3+4t & 3 \\ 1 & 1 & 4t \end{vmatrix} = (1+4t)\cdot(3+4t)\cdot(4t) + 2 + 3t$$

$$(3+12t+4t+16t^2)\cdot 4t + 2 + 3t$$

$$(3+t+t^2)\cdot 4t + 2 + 3t$$

$$2t + 4t^2 + 4t^3 + 2 + 3t$$

$$4t^3 + 4t^2 + 2$$

Cayley – Hamiltonova věta:

Použijeme, že $M \cdot adj(M) = det(M) \cdot I_n$ pro $M = A - tI_n$

Pro $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ platí:

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n = O_n$$

Složky $adj(A - tI_n)$ jsou det. podmatic, t.j. polynomy stupně t nejvýše $t-1$.

$$Adj(A - tI_n) = t^{n-1}B_{n-1} + \dots + tB_1 + B_0 \quad \text{pro } B_{n-1}, \dots, B_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Například $A - tI_n = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 3 & -1-t & 1 \\ 1 & -2 & 2-t \end{pmatrix} \rightarrow adj(A - tI_n) = \begin{pmatrix} t^2-t+4 & -2t+4 & 6 \\ -3t+3 & t^2-3t+2 & -3t+3 \\ t-5 & t-4 & t^2-7 \end{pmatrix} =$

$$= t^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Máme tedy: $(A - tI_n)(t^{n-1}B_{n-1} + \dots + tB_1 + B_0) = p_A(t)I_n = (-1)^n t^n I_n + a_{n-1}t^{n-1}I_n + \dots + a_1 t^1 I_n + a_0 I_n$

Koeficient u t^n: $\quad -B_{n-1} = (-1)I_n \quad \cdot A^n$ zleva

Koeficient u t^i: $\quad AB_i - B_{i-1} = a_i I_n \quad \cdot A^i$ zleva

Koeficient u t^0: $\quad AB_0 = a_0 I_n$

Levá strana:

$$-A^n B_{n-1} + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + A(AB_1 - B_0) + AB_0 = O_n$$

→ Postupně se to tam vyruší.

Pravá strana:

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 I_n = p_A(A)$$