Determinant a počet koster grafu:

Laplaceova matice grafu G na $V_G = \{v_1, \dots, v_n\}$ je $L_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že:

$$(L_G)_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pro } i = j \\ -1 & \text{jestliže } i \neq j \text{ a } (v_i, v_j) \in E_G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Laplaceova matice je singulární.

Pokud G není souvislý, pak $L_G^{1,1}$ je singulární.

Každý G na alespoň dvou vrcholech má $\det(L_G^{1,1})$ koster.

Zároveň platí i pro izomorfní grafy, že mají stejný počet koster, jelikož permutací změním sloupce a řádky, tedy: $\operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\pi) = 1$ VŽDY!

Pro libovolné $i, j \in \{1 \dots n\}$: $\det(L_G^{i,j}) = (-1)^{i+j} \det(L_G^{1,1})$

Každý multigraf G s $|V_G| \geq 2$ splňuje: $\kappa(G) = \det(L_G^{1,1})$

Nechť G je souvislý. Indukcí podle $m = |E(G)|$

$m = 1$:

G má jen dva vrcholy $\Rightarrow \kappa(G) = 1 = \deg(v_2) = (L_G)_{2,2} = \det(L_G^{1,1})$

Zvolme libovolnou $e \in E_G$: $e = (v_1, v_2)$

$A = L_G^{1,1}$, $B = L_{G-e}^{1,1}$, $C = L_{G \circ e}^{1,1} = A^{1,1} = B^{1,1}$

Kontrakce hrany
Odebírání hrany

Mají o jednu méně hran, tedy pro ně platí IP.

(C je podmatice L_G odpovídající $v_3 - v_n$.)

Z indukčního předpokladu $\kappa(G-e) = \det(B)$, $\kappa(G \circ e) = \det(C)$

Matice A a B jsou shodné kromě $b_{1,1} = a_{1,1} - 1$, protože vypuštěním hrany e se změnil stupeň v_2 (a v_1).

A je tak prakticky součet prvního sloupce B a vektoru e_1.

Linearitou $\det(A)$ podél tohoto rozdělení prvního sloupce dostáváme:

$\det(A) = \det(B) + \det(C)$, tedy $\kappa(G) = \det(L_{G-e}^{1,1}) + \det(L_{G \circ e}^{1,1}) = \det(L_G^{1,1})$

$$\kappa(G)=\kappa(G-e)+\kappa(G\circ e)=\det(L^{1,1}_{G-e})+\det(L^{1,1}_{G\circ e})=\det(L^{1,1}_{G})$$

Linearita determinantu

$$\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}3&-1&-1&0&0\\-1&3&0&-1&0\\-1&0&2&-1&0\\0&-1&-1&3&-1\\0&0&0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+1&-1&-1&0&0\\-1+0&3&0&-1&0\\-1+0&0&2&-1&0\\0+0&-1&-1&3&-1\\0+0&0&0&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2&-1&-1&0&0\\-1&3&0&-1&0\\-1&0&2&-1&0\\0&-1&-1&3&-1\\0&0&0&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&3&0&-1&0\\0&0&2&-1&0\\0&-1&-1&3&-1\\0&0&0&-1&1\end{vmatrix}=$$

Rozvoj podle prvního sloupce

$$=\begin{vmatrix}2&-1&-1&0&0\\-1&3&0&-1&0\\-1&0&2&-1&0\\0&-1&-1&3&-1\\0&0&0&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&-1&0\\0&2&-1&0\\-1&-1&3&-1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=\det(\boldsymbol{B})+\det(\boldsymbol{C})$$