Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a nechť zobr. $f: V \times V \to \mathbb{K}$ splňuje:

- $\to$ $\forall u,v \in V, \forall a \in \mathbb{K}: f(au,v) = f(u,av) = a f(u,v)$
- $\to$ $\forall u,v,w \in V: f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w)$
- $\to$ $\forall u,v,w \in V: f(u,v+w) = f(u,v) + f(u,w)$

Poté se f nazývá bilineární forma na V.

Bilineární forma je symetrická, když $\forall u,v \in V: f(u,v) = f(v,u)$.

Zobrazení $g: V \to \mathbb{K}$ se nazývá kvadratická forma, pokud existuje bilineární f taková, že $g(u) = f(u,u)\ \forall u \in V$.

Matice forem:

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ s bází $X = (v_1 \dots v_n)$.

Matice bilineární formy f vzhledem k bázi X je matice B def.: $b_{i,j} = f(v_i, v_j)$

Matice kvadratické formy g je matice symetrické bilineární formy f odpovídající g, pokud taková existuje.

$$b_{i,j} = f(v_i,v_j) = \frac{1}{2}\left(g(v_i+v_j) - g(v_i) - g(v_j)\right)$$

$$g(v_i+v_j) = f(v_i+v_j, v_i+v_j) = f(v_i,v_i) + f(v_i,v_j) + f(v_j,v_i) + f(v_j,v_j)$$

$$g(v_i+v_j) - \underbrace{f(v_i,v_i)}_{g(v_i)} - \underbrace{f(v_j,v_j)}_{g(v_j)} = f(v_i,v_j) + f(v_j,v_i)$$

Použití matic forem:

$$f(u,w) = [u]_X^T B [w]_X \qquad g(u) = [u]_X^T B [u]_X$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \implies f(u,w) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i f(v_i,v_j) b_j = [u]_X^T B [w]_X$$

Přechod formy k jiné bázi

Nechť B je vzhledem k X. Matice formy vzhledem k Y $= [id]_{YX}^T B [id]_{YX}$

$[u]_X = [id]_{YX} [u]_Y$, $[w]_X = [id]_{YX} [w]_Y$, potom:

$$f(u,w) = [u]_X^T B [w]_X = [u]_Y^T \, [id]_{YX}^T B [id]_{YX} \, [w]_Y$$

Analytické vyjádření bilineární formy f nad $\mathbb{K}^n$ s maticí B je homogenní polynom

$$f\left((x_1 \dots x_n)^T, (y_1 \dots y_n)^T\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$$

Diagonalizace forem:

Pokud je g kvadratická forma na vektorovém prostoru V konečné dimenze n nad tělesem $\mathbb{K}$ $\mathrm{char} \neq 2$, pak má forma g diagonální matici B vzhledem k vhodné bázi X.

– Platí stejný důkaz jako pro diagonalizaci reálných symetrických matic.

Indukcí podle n:

$$A = A_n = \begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \end{array}.$$

Když $\alpha \neq 0$ volíme $P_n = \begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha} a & I_{n-1} \end{array}$.

Pak $P_n A_n P_n^T = \begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha} a & I_{n-1} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha} a & I_{n-1} \end{array} =$

$$= \begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline 0 & -\frac{1}{\alpha} a a^T + \tilde{A} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline -\frac{1}{\alpha} a & I_{n-1} \end{array} = \begin{array}{c|c} \alpha & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}$$

, kde $A_{n-1} = \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ je symetrická

Proto pro A_{n-1} existuje R_{n-1} t.ž. $R_{n-1} A_{n-1} R_{n-1}^T$ je diagonální.

Zvolíme $R_n = \begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array} \cdot P_n$. Pak $R_n A_n R_n^T = \begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array} \cdot P_n A_n P_n^T \cdot \begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1}^T \end{array}$

$$= \begin{array}{c|c} \alpha & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} A_{n-1} R_{n-1}^T \end{array}$$ je diagonální.

Pokud ale $\alpha = 0$, ale $a \neq 0$, pak $a_{i,1} \neq 0$. Použijeme elementární E pro přičtení i-tého řádku k prvnímu. Vezmeme $A' = EAE^T$ namísto A. Protože $\alpha' = 2a_{i,1} \neq 0$, můžeme postupovat jako výše.

Když $\alpha = 0$, $a = 0$, pak $A_{n-1} = \tilde{A}$ a $R_n = \begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \end{array}$

Sylvestrův zákon setrvačnosti

Každá kvadratická forma na konečně generovaném **reálném** vekt. prost. má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s $1, -1, 0$. Všechny takové matice odpovídající této formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1.

1) Existence.

Nechť B je matice formy vzhledem k nějaké bázi X. Reálná sym. matice lze diagonalizovat, neboli $B = R^T D R$ pro reg. R.

Rozložíme $D = S^T D' S$, kde $d_{i,i} \begin{cases} = 0 & d'_{ii} = 0;\ s_{ii} = 1 \\ > 0 & d'_{ii} = 1;\ s_{ii} = \sqrt{d_{ii}} \\ < 0 & d'_{ii} = -1;\ s_{ii} = \sqrt{-d_{ii}} \end{cases}$

Nyní SR je reg. a $B = (SR)^T D' SR$.

Zvolíme bázi Y tak, že souřadnice vektorů Y vzhledem k X jsou sloupce SR, ten. $[id]_{YX} = SR$, $[id]_{XY} = (SR)^{-1}$.

Nyní:

$$[id]_{XY}^T B [id]_{XY} = ((SR)^{-1})^T (SR)^T D' S R (SR)^{-1} = D'$$

je hledaná diagonální matice formy.

2) Jednoznačnost:

Nechť $X = (u_1 — u_n)$, $Y = (v_1 — v_n)$ jsou dvě báze t.ž. odpovídající matice B a B' formy g jsou diagonální s $1, -1$ a 0 uspořádanými tak, že nejdříve jsou 1, potom -1 a 0 jsou poslední.

Když přenásobím maticí matici přechodu, tak nezměním rank. $\to$ #nul tak bude stejný.

Nechť $r = \#1$ v B, $s = \#1$ v B'. Pokud $r > s$, pak uvažme $span(u_1 — u_r)$ a $span(v_{s+1} — v_n)$. Součet jejich dimenzí přesahuje n, mají tedy netriviální průnik.

Zvolme $w \in (span(u_1 — u_r) \cap span(v_{s+1} — v_n)) \setminus 0$, tedy $[w]_X = (x_1 — x_r, 0, \ldots 0)^T$
$[w]_Y = (0 — 0, y_{s+1} — y_n)^T$

symetricky

Nyní $g(w) = [w]_X^T B [w]_X = x_1^2 + \ldots + x_r^2 > 0$ ($>$ plyne z $w \neq 0$)
ale $g(w) = [w]_Y^T B' [w]_Y = -y_{s+1}^2 - \ldots - y_{rank(B')}^2 \le 0$. SPOR $r \not> s$, $s \not> r$, tedy $\underline{r = s}$.

Formy s reálnými pozitivně definitními maticemi jsou ty, které lze diagonalizovat na I_n.

- $A = U^H U = U^T I_n U$

Pro komplexní symetrické formy (jiné než hermitovské matice) dává diagonální matice s 1 a 0 na diagonále.