$S_n$ – grupa permutací na množině $\{1, \dots, n\}$

$p \in S_n$, $sgn(p) = (-1)^{\#\text{inverzí } p}$

pro $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (+1)\, a_{1,1} a_{2,2} + (-1) \cdot a_{1,2} a_{2,1}$$

**Determinant** matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je dán výrazem:

$$det(A) = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = |A|$$

→ prakticky tak permutuji všechny možné kombinace jednotlivých výběrů prvku z řádků. Důležité je nezapomenout $sgn(p)$

**Sarrusovo pravidlo:**

$$\begin{array}{c} \oplus \\ \\ \ominus \end{array} \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right.$$

Jen pro 3x3, ale přesto...

Má-li matice $A$ nulový řádek, $det(A) = 0$

Každá permutace obsahuje 0, tedy všechny $\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$ budou obsahovat jednu nulu.

Je-li matice $A$ trojúhelníková (diagonální), platí:

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Každá permutace s indexem $i > p(i)$ má index $j < p(j)$.

V důsledku toho $a_{j,p(j)} = 0$

Pouze součin diagonály neobsahuje žádnou nulu.

## Vlastnosti determinantu:

$$det(A) = det(A^T)$$

Pro $p \in S_n$: $p(i) = j \Leftrightarrow p^{-1}(j) = i$

$$det(A^T) = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} (A^T)_{i,p(i)} = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{p(i),i} = \sum_{p^{-1} \in S_n} sgn(p^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,p^{-1}(j)} = \sum_{p^{-1} \in S_n} sgn(p^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} = det(A)$$

Přerovnání sloupců matice:

Pro $q \in S_n$ a $B : b_{i,j} = a_{i,q(i)}$ : $\det(B) = \det(A) \cdot sgn(q)$

$$\det(B) = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} b_{i,p(i)} = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(p(i))} = \sum_{p \in S_n} sgn(q) \cdot sgn(q) \cdot sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,(q \circ p)(i)} =$$

$$sgn(q) \sum_{r \in S_n} sgn(r) \prod_{i=1}^{n} a_{i,r(i)} = sgn(q) \cdot \det(A)$$

Totéž platí pro přerovnání řádků

↳ Výměnou právě dvou řádků/sloupců obrací znaménko

Matice nad tělesy char $\neq 2$:

Má-li A dva stejné řádky: $\det(A) = 0$

$x = -x \Rightarrow x = 0$

→ když prohodím dva řádky musí se mi změnit znaménko u determinantu. To ale platí jen pro nulu.

Lemma: Determinant matice se dvěma stejnými řádky

Má-li matice dva stejné řádky / sloupce, je její $\det(A) = 0$.

Nechť se $k$-tý řá shoduje s $k'$-tým. Pro $p \in S_n$, $q = p \circ (k, k')$ platí:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(i)}, \text{ ale } sgn(p) = -sgn(q)$$

$p \leftrightarrow q$ je bijekce mezi permutacemi s opačnými znaménky, takže sčítance lze spárovat tak, že se odečtou.

Determinant matice A je LZ na každém řádku a sloupci, t.j.:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ t \cdot a_{i,1} & t \cdot \dots & t \cdot a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \& \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} + c_{i,1} & \dots & b_{i,n} + c_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & \dots & b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \dots & c_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

## Důkaz skalárního násobku:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ t\cdot a_{i,1} & t\cdot \dots & t\cdot a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{p\in S_n} sgn(p)\cdot\left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}\right)\cdot t\right) = t\cdot \sum_{p\in S_n} sgn(p)\cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = t\cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

## Důkaz pro součet:

Nechť je z každého součtu jeden prvek součástí matice A. Poté platí:

$$\det(A + e_i b^T) = \sum_{p\in S_n} sgn(p)\, a_{1,p(1)}\cdot\ldots\cdot(a_{i,p(i)} + b_{p(i)})\cdots a_{n,p(n)} =$$

$$= \sum_{p\in S_n} sgn(p)\, a_{1,p(1)}\cdots a_{i,p(i)}\cdots a_{n,p(n)} + \sum_{p\in S_n} sgn(p)\, a_{1,p(1)}\cdots b_{p(i)}\cdots a_{n,p(n)}$$

$$= \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*}))$$

Tohle zajistí, že na i-tém řádku bude jen hodnota $b^T$ vektoru.

$e_i b^T =$

$i = 4$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

## Důsledek linearity:

Přičtením sk. násobku řádku k jinému se determinant nezmění:

$$\begin{vmatrix} - a_{i,*} + t\cdot a_{j,*} - \\ — a_{j,*} — \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - a_{i,*} - \\ - a_{j,*} - \end{vmatrix} + t\cdot \begin{vmatrix} - a_{j,*} \\ - a_{j,*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - a_{i,*} - \\ - a_{j,*} - \end{vmatrix} + t\cdot 0$$

Je-li A singulární, pak $\det(A) = 0$.

Závislý řádek lze eliminovat na nulový řádek

## Determinant součinu:

$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}: \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

B.ú.n.o. $A, B$ jsou regulární, jinak $0 = 0$.

Součiny s elementárními maticemi zachovávají determinant, protože:

$$\det(EB) = \det(E) \cdot \det(B)$$

$\left.\begin{array}{l} - \text{pro přičtení } i\text{-tého řádku k } j\text{-tému}: \det(E) = 1 \\ - \text{pro vynásobení } i\text{-tého řádku } t: \det(E) = t \end{array}\right\}$ z toho nyní lze odvodit ostatní operace

Rozložíme reg. $A$ na elementární matice $A = E_1 \dots E_k$.

$$\det(AB) = \det(E_1 \dots E_k B) = \det(E_1)\det(E_2 \dots E_k B) = \det(E_1)\det(E_2) \dots \det(E_k)\det(B) =$$
$$\det(E_1 \dots E_k)\det(B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

V důsledku platí:

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

$A$ je regulární $\iff \det(A) \neq 0$

## Laplaceův rozvoj:

$A^{i,j}$ je matice získaná odstraněním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce.

$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a jakékoli $i \in \{1 \dots n\}$ platí, že:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \det(A^{i,j})$$

→ Hodí se, pokud nějaký sloupec obsahuje hodně nul

Vyjádříme $i$-tý řádek jako lin. kombinaci vekt. kan. báze a použijeme linearitu:

$$(a_{i,1}; a_{i,2}; \dots; a_{i,n}) = a_{i,1}(e^1)^T + a_{i,2}(e^2)^T + \dots + a_{i,n}(e^n)^T$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = a_{i,1}\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + a_{i,2}\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \dots + a_{i,n}\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

**j-tý člen:**

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots\, 0 & 1 & 0\, \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots \\ — (e^j)^T — \\ \cdots \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} — (e^j)^T — \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1+j+1} \begin{vmatrix} — (e^1)^T — \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & A^{ij} \\ \hline \end{array} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$$

Tohle reprezentuje vyjádření jednoho prvku Laplaceova rozvoje

## Adjungovaná matice:

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je Adjungovaná matice $adj(A)$ definovaná:

$$adj(A)_{j,i} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$$

⟶ tedy faktory Laplaceova rozvoje podél $i$-tého řádku $A$ ukládáme do $i$-tého sloupce $adj(A)$

Pro regulární matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$

Tohle je Laplaceův rozvoj

$$A\, adj(A) = \det(A) \cdot I_n \implies (A\, adj(A))_{i,i} = \det(A)$$

Protože ve sloupci $adj(A)$ jsou relevantní determinanty

Pomocí Laplaceova rozvoje $\det(A)$:

$(i\text{-tý řádek z } A) \cdot (i\text{-tý sloupec z } adj(A)) = \det(A)$

pro $i \neq j$:

$(j\text{-tý řádek z } A) \cdot (i\text{-tý sloupec z } adj(A)) = \det(A') = 0$

Jelikož obsahuje dva stejné sloupce, musí být výsledný determinant nulový.

kde $A'$ je $A$ s nahrazeným $i$-tým řádkem za $j$-tý.

Tedy: $A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I_n \implies A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)\right) = I_n$

## Cramerovo pravidlo:

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární matice. Pro jakékoliv $b \in \mathbb{R}^n$ řešení $x$ soustavy $Ax = b$ splňuje $x_i = \frac{1}{\det(A)} \det(A_{i\to b})$, kde $A_{i\to b}$ získáme nahrazením $i$-tého sloupce vektorem $b$.

Uvažme matici $I_{i\to x}$ získanou z $I_n$ nahrazením $i$-tého sloupce vektorem $x$.

Potom $A \cdot I_{i\to x} = A_{i\to b}$

tedy: $\det(A) \cdot \det(I_{i\to x}) = \det(A_{i\to b})$

proto: $x_i = \det(I_{i\to x}) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A_{i\to b})$