Domácí úlohy — sada č. 9

Jméno a příjmení: Mikoláš Fromm, McCoolAus

Potřebný čas:

1. V $\mathbb{R}^3$ určete ortogonální doplněk množiny $\{(1,2,3)^T, (4,5,6)^T, (7,8,9)^T\}$ vzhledem ke skalárnímu součinu danému předpisem $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ortogonální doplněk := množina všech vektorů, které jsou kolmé na prostor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \dim(M) = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\dim(M^T) = 1}$$

hledám tedy jeden vektor, který je kolmý na první dva vektory z množiny (protože na třetí je automaticky kolmý)

$$\underbrace{\langle x_1|v\rangle = \langle x_2|v\rangle = 0}_{\text{kolmost}} \Rightarrow v \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\to v \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 13 & 8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$v_3 = t \; : \; t \in \mathbb{R}$ ← může být zvoleno libovolně.

$v_2 = \frac{3}{2}t$

$v_1 = -1t$

$$\underline{v = \left(-1, \tfrac{3}{2}, 1\right)}$$

Doplněk = $\text{span}\left\{\left(-1, \tfrac{3}{2}, 1\right)\right\}$

Zkouška:

$$\left(-1, \tfrac{3}{2}, 1\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(-1, \tfrac{3}{2}, 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\left(-1, \tfrac{3}{2}, 1\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \left(-1, \tfrac{3}{2}, 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

pokračování na 2. straně

2. Doplňte hodnoty parametrů a, b a c kde $a, b \geq 0$ tak, aby následující zobrazení f bylo izometrií mezi podprostory dimenze 2 v $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na $\mathbb{R}^3$:

$f((4,1,3)^T) = (1,0,a)^T, f((1,2,4)^T) = (3,b,c)^T$

Isometrie := pokud $\langle x \mid y \rangle = \langle f(x) \mid f(y) \rangle$

$$f\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\|(4,1,3)^T\| = \|(1,0,a)^T\|$$

$$\sqrt{16+1+9} = \sqrt{26} = \sqrt{1+a^2}$$

$$26 = 1 + a^2$$

$$a = \pm 5$$

$$\Big\downarrow \; a, b \geq 0$$

$$\boxed{a = 5}$$

$$\|(1,2,4)^T\| = \|(3,b,c)^T\|$$

$$\sqrt{1+4+16} = \sqrt{21} = \sqrt{9+b^2+c^2}$$

$$\boxed{b^2 + c^2 = 12}$$

Tedy například:

$$b = \sqrt{8}$$

$$c = \sqrt{4}$$