Domácí úlohy — sada č. 7

Jméno a příjmení: Mikoláš Fromm, McCoolAns

Potřebný čas: 60 min

1. Pro reálnou matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ určete vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu:

a) – množinu všech vektorů, které jsou kolmé na všechny řádky matice **A**,

b) – množinu všech vektorů, které jsou kolmé na všechny vektory ze sloupcového prostoru matice **A**.

Kolmost vektorů x, y nastává tehdy, pokud $\langle x, y\rangle = 0$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_4 = t$
$x_3 = -3t$
$x_2 = s$
$x_1 = -2s + t$

$s \cdot (-2, 1, 0, 0) + t \cdot (1, 0, -3, 1)$

a) zk: $t = s = 1$

$\langle (1,2,1,2), (-1,1,-3,1)\rangle = -1 + 2 - 3 + 2 = 0$

$\langle (-2,-4,-1,-1), (-1,1,-3,1)\rangle = 2 - 4 + 3 - 1 = 0$

$\langle (2,4,4,10), (-1,1,-3,1)\rangle = -2 + 4 - 12 + 10 = 0$

$V_a = \{(-2s+t, s, -3t, t) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-6, -2, 1)$

b) zk: $t = 1$

$\langle (1,-2,2), (-6,-2,1)\rangle = -6 + 4 + 2 = 0$

$\langle (2,-4,4), (-6,-2,1)\rangle = -12 + 8 + 4 = 0$

$\langle (1,-1,4), (-6,-2,1)\rangle = -6 + 2 + 4 = 0$

$\langle (2,-1,10), (-6,-2,1)\rangle = -12 + 2 + 10 = 0$

$V_b = \{t \cdot (-6,-2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

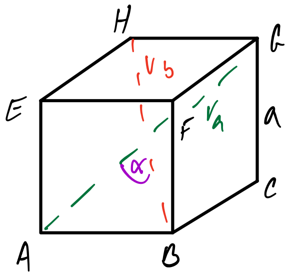
pokračování na 2. straně

$$\cos(\alpha)\cdot\|x\|\cdot\|y\| = \langle x|y\rangle \iff \cos(\alpha) = \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

2. Určete kosinus úhlu, který svírají dvě tělesové úhlopříčky krychle. a)

   Určete kosinus úhlu, který svírají dvě sousední stěny osmistěnu. b)

   Jak spolu tyto úhly souvisejí a proč? (Zkuste zdůvodnit pomocí geometrie.)

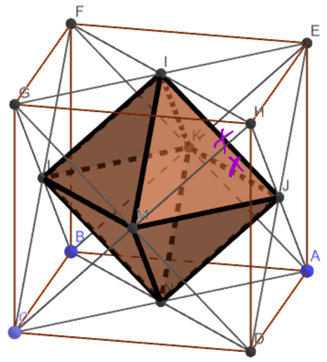


$v_a = (1,1,1)$

$v_b = (-1,1,1)$

$$\cos(\alpha) = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

b)



$A = (0,0,0)$ $\quad E = (0,0,1)$ $\quad K = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$B = (1,0,0)$ $\quad F = (1,0,1)$ $\quad M = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

$C = (1,1,0)$ $\quad G = (1,1,1)$ $\quad J = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$D = (0,1,0)$ $\quad H = (0,1,1)$ $\quad I = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

$\vec{JI} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$X = J + \frac{1}{2}\vec{JI} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$\vec{XM} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$\vec{XK} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$$\|\vec{XM}\| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\|\vec{XK}\| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle \vec{XM}, \vec{XK}\rangle}{\|\vec{XM}\|\cdot\|\vec{XK}\|} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{4}{16} + \frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}} = \frac{-\frac{2}{16}}{\frac{6}{16}} = -\frac{1}{3}$$

Společně tyto dva úhly doplňují do 180°.