Domácí úlohy — sada č. 4

Jméno a příjmení: Mikoláš Fromm, McCoolAus

Potřebný čas: 120 min

1. Nad tělesem $\mathbb{C}$ nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následující matice:

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -4-t & -3 & 3 & -4 \\ 5 & 4-t & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 2-t & -4 \\ -3 & -3 & 0 & -2-t \end{vmatrix} = t^4 - 5t^2 + 4 = t^4 - 4t^2 - t^2 + 4 =$$

$$t^2 \cdot (t^2 - 4) - 1 \cdot (t^2 - 4) =$$

$$(t^2 - 1) \cdot (t^2 - 4) = 0$$

tzn. že vlastní čísla jsou:

$\pm 1, \pm 2$

$+1$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} x_4 &= t \\ x_3 &= t \\ x_2 &= -2t \\ x_1 &= t \end{aligned}\right\} (1, -2, 1, 1)^T$$

$+2$:

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 0 & -4 \\ -3 & -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_3 &= t \\ x_2 &= -t \\ x_1 &= t \end{aligned}$$

$(1, -1, 1, 0)^T$

pokračování na 2. straně

-1

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 3 & -4 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_2 &= t \\ x_1 &= -t \end{aligned}$$

$$\boxed{(-1,1,0,0)^T}$$

-2

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -6 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_4 &= t \\ x_3 &= t \\ x_2 &= -t \\ x_1 &= t \end{aligned}$$

$$\boxed{(1,-1,1,1)^T}$$

2. Cestovní kancelář „Naše národní památky“ se chystá pořídit 1095 elektromobilů a 219 dobíjecích stanic, aby je mohla pronajímat turistům prahnoucím po českých památkách UNESCO. Důkladným průzkumem trhu bylo zjištěno, že

   – z elektromobilů vypůjčených u Jizerskohorských bučin se jich pravděpodobně 70 % vrátí zpět u Jizerskohorských bučin, 10 % v Kroměříži a 20 % v Litomyšli.
   – z elektromobilů vypůjčených v Kroměříži se jich 50 % vrátí zpět nejspíš v Kroměříži a 50 % v Litomyšli,
   – z elektromobilů vypůjčených v Litomyšli se jich 10 % vrátí u Jizerskohorských bučin, 40 % v Kroměříži, 30 % zpět v Litomyšli a 20 % v Telči,
   – z elektromobilů vypůjčených v Telči se jich 50 % překvapivě vrátí na druhém konci republiky u Jizerskohorských bučin, 30 % v Kroměříži a 20 % v Litomyšli.

   Jak má nejlépe rozmístit dobíjecí stanice do půjčoven plánovaných v oněch čtyřech místech, aby byly dlouhodobě pokud možno co nejrovnoměrněji vytíženy? Úlohu si zjednodušte předpoklady, že zápůjčky jsou jen jednodenní, všechny elektromobily budou zapůjčeny, že se elektromobily nabíjejí jen přes noc lacinějším nočním proudem, a že za tu dobu každá stanice zvládne dobít pět elektromobilů.

   (Ve skutečnosti jich objednávají 1100 a 220, ale jedna ze stanic bude v Kutné Hoře na ředitelství a po jednom elektromobilu si rozeberou ředitel a vedoucí poboček.)

Hledám vlastní vektor s vlastním číslem 1 → tedy číslem, který nedeformuje.

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} JH & KR & LT & TL \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} {,}7 & {,}1 & {,}2 & {,}0 \\ {,}0 & {,}5 & {,}5 & {,}0 \\ {,}1 & {,}4 & {,}3 & {,}2 \\ {,}5 & {,}3 & {,}2 & {,}0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} {,}7-t & {,}1 & {,}2 & {,}0 \\ {,}0 & {,}5-t & {,}5 & {,}0 \\ {,}1 & {,}4 & {,}3-t & {,}2 \\ {,}5 & {,}3 & {,}2 & {,}0 \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= t^4 - 1{,}5t^3 + 0{,}45t^2 + 0{,}038t + 0{,}012 = \frac{1}{500}\underline{(t-1)}\left(500t^3 - 250t^2 - 25t - 6\right)$$

$$\begin{pmatrix} -{,}3 & {,}1 & {,}2 & {,}0 \\ {,}0 & -{,}5 & {,}5 & {,}0 \\ {,}1 & {,}4 & {,}3 & {,}2 \\ {,}5 & {,}3 & {,}2 & {,}0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \text{řešení: } x_1 = \begin{array}{cccc} JH & KR & LT & TL \\ (0{,}2282; & 0{,}3606; & 0{,}3424; & 0{,}0684)^T \end{array}$$

	JH	KR	LT	TL
AUT:	250	395	375	75
NABÍJEČEK:	50	79	75	15