Domácí úlohy — sada č. 11

Jméno a příjmení: Mikoláš Fromm, McCoolAus

Potřebný čas: 75 min

1. Kvadratická forma nad $\mathbb{Z}_5$ má vůči bázi $X = \{(1,3,1)^T, (3,0,2)^T, (2,1,4)^T\}$ analytické vyjádření $g(\mathbf{u}) = 3u_1^2 + 2u_1u_2 + u_1u_3$. Určete její analytické vyjádření vůči kanonické bázi.

$$[u]_X = {}_X[id]_Y\,[u]_Y$$

$$A_X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \cancel{2}\,3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cancel{2}\,3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_K = {}_X[id]_K^T \cdot A_X \cdot {}_X[id]_K$$

Od báze K do X.

Matice přechodu: $\mathbb{Z}_5$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{2}\,1 & \cancel{1}\,\cancel{2}\,3 & \cancel{1}\,\cancel{2}\,3 & \cancel{1}\,\cancel{2}\,3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$${}_K[id]_X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_K = {}_X[id]_K^T \cdot A_X \cdot {}_X[id]_K =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

Analytické vyjádření vůči kanonické bázi je tedy pak:

$$u_1^2 + 3u_2^2 + 3u_1u_2 + 3u_1u_3 + 3u_2u_1 + u_2u_3 + 3u_3u_1 + u_3u_2 =$$

$$= \underline{u_1^2 + 3u_2^2 + u_1u_2 + u_1u_3 + 2u_2u_3}$$

pokračování na 2. straně

$\Rightarrow$ matice bude symetrická

2. Určete matici kvadratické formy g nad $\mathbb{Z}_7^6$ vůči bázi X takové, že pro $i \in \{1, \dots, 6\}$ je $g(\mathbf{x}^i) = i$. Zde $\mathbf{x}^i$ značí i-tý vektor báze X.

$$X = \{ x^i \mid i \in \{1, \dots, 6\} \}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zk: $g(x^1) = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

$g(x^2) = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 2$

$g(x^3) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 3$

$\vdots$

$g(x^6) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 6$

báze X:

$$X = \{ (1,0,0,0,0,0)^T, (1,1,0,0,0,0)^T, (1,1,1,0,0,0)^T, (1,1,1,1,0,0)^T, (1,1,1,1,1,0)^T, (1,1,1,1,1,1)^T \}$$

$\mathbb{Z}_7$

$0^2 = 0$

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

$3^2 = 2$

$4^2 = 2$

$5^2 = 4$

$6^2 = 1$

Řešeno metodou „přemýšlím a až nevím, tak půjdu od jednoduššího (I_n)."

Chtěl jsem symetrickou matici. Zároveň jsem očekával, že budu pracovat s 1, abych mohl beztrestně násobit.

Do I_n jsem jen zkusil doplnit takovou bázi, pro kterou platí vstupní předpis.